Seminar Probabilistische Methoden

Korrelationsungleichungen*

Jonas Zimmermann

22. November 2005

1 Monotone Eigenschaften

In diesem Abschnitt wollen wir das Resultat des letzten Abschnitts – die FKG-Ungleichung – ausbeuten und einige Aussagen über Familien von Mengen und Graphen zeigen. Wir wollen zunächst einige Definitionen geben.

Definition 1.1 (Monotone Familien, $\mathbb{P}(\mathcal{A})$)**.** *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine Familie von Teilmengen von* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. $\mathcal{A}$ *heißt* monoton fallend, *gdw. aus* $A \in \mathcal{A}$ *und* $A' \subseteq A$ *folgt* $A' \in \mathcal{A}$. *Ähnlich ist* $\mathcal{A}$ monoton steigend, *gdw. mit* $A \in \mathcal{A}$ *und* $A \subseteq A'$ *auch* $A' \in \mathcal{A}$ *gilt.*

Wir betrachten die Potenzmenge $\mathfrak{P}(N)$ *von* N *als Wahrscheinlichkeitsraum mit gleicher Wahrscheinlichkeit für* $A \in \mathfrak{P}(N)$. *Dann definieren wir die* Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{A}$ *als* $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A}|}{2^n}$. *Dies verstehen wir als die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig aus* $\mathfrak{P}(N)$ *ausgewählte Menge in* $\mathcal{A}$ *liegt.*

Definition 1.2 (Halbordnung, Verband)**.** *Eine* Halbordnung *ist eine Relation* $\leq$ *auf einer Menge* M*, so daß gilt:*

$$a \leq a \qquad \forall a \in M \tag{1}$$
$$a \leq b \;\wedge\; b \leq a \Rightarrow a = b \qquad \forall a, b \in M \tag{2}$$
$$a \leq b \;\wedge\; b \leq c \Rightarrow a \leq c \qquad \forall a, b, c \in M \tag{3}$$

Ein Verband *ist eine Menge* L *versehen mit einer Halbordnung, in welcher zwei Elemente* x, y *genau eine kleinste obere Schranke* $x \vee y$ *(*join *oder Supremum) und genau eine größte untere Schranke* $x \wedge y$ *(*meet *oder Infimum) haben. Ein Verband* L *heißt* distributiv, *wenn für alle* $x, y, z \in L$ *gilt*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

*basiert auf Kapitel 6 in [1]

Beispiel 1.3. Seien $N = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,3\}$, und $A \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ sei monoton fallend, dann gilt $\mathcal{A} \supseteq \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$. Gilt hier auch Gleichheit, so haben wir $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathfrak{P}(N)|} = \frac{4}{2^4} = 1/4$.

Im folgenden werden wir die Bezeichnung $\langle\bullet\rangle$ aus dem letzten Abschnitt verwenden. Sei μ eine Abbildung eines Verbandes L auf $\mathbb{R}^+$, die nicht identisch Null ist. Sei weiter f eine beliebige Funktion von L nach $\mathbb{R}^+$. Dann setzen wir

$$\langle f\rangle := \frac{\sum_{x\in L} f(x)\mu(x)}{\sum_{x\in L}\mu(x)}.$$

Satz 1.4 (Kleitmansches Lemma)**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei monoton steigende Familien von Teilmengen von $N = \{1,\dots,n\}$ und $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ monoton fallende Familien von Teilmengen von N. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) &\geq \mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{B})\\ \mathbb{P}(\mathcal{C}\cap\mathcal{D}) &\geq \mathbb{P}(\mathcal{C})\mathbb{P}(\mathcal{D})\\ \mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{C}) &\leq \mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{C})\end{aligned}$$

Setzen wir die Definition von $\mathbb{P}$ ein, so heißt dies

$$\begin{aligned}2^n\,|\mathcal{A}\cap\mathcal{B}| &\geq |\mathcal{A}|\,|\mathcal{B}|\\ 2^n\,|\mathcal{C}\cap\mathcal{D}| &\geq |\mathcal{C}|\,|\mathcal{D}|\\ 2^n\,|\mathcal{A}\cap\mathcal{C}| &\leq |\mathcal{A}|\,|\mathcal{C}|\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß $\mathfrak{P}(N)$ mit den Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ für Mengen tatsächlich ein Verband ist. (Das prüft man leicht nach, über die Definition von $\cap$ und $\cup$.) Sei $f\colon \mathfrak{P}(N) \to \mathbb{R}^+$ die charakteristische Funktion von $\mathcal{A}$, also

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A \notin \mathcal{A}\\ 1 & \text{für } A \in \mathcal{A}\end{cases}.$$

Sei g die charakteristische Funktion von $\mathcal{B}$. Nach Definition sind f und g steigend auf $\mathfrak{P}(N)$ mit der Halbordnung „$\subseteq$“. Wir können nun die FKG-Ungleichung mit dem trivialen Maß $\mu \equiv 1$ anwenden und erhalten

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = \frac{|\mathcal{A}\cap\mathcal{B}|}{2^n} = \frac{\sum_{A\in\mathfrak{P}(N)} f(A)g(A)}{2^n} = \langle fg\rangle \geq \langle f\rangle\langle g\rangle = \mathbb{P}(\mathcal{A})\mathbb{P}(\mathcal{B}).$$

Die anderen Ungleichungen folgen ebenso aus der FKG-Ungleichung, indem man den Beweis leicht modifiziert (wie wir es im letzten Abschnitt gesehen haben). □

Wir möchten das Ergebnis von Satz 1.4 nun etwas verallgemeinern: Sei $p = (p_1,\dots,p_n) \in \{p \in \mathbb{R}^n, 0 \leq p_i \leq 1\}$. Wir definieren nun $\mathfrak{P}(N)$ als Wahrscheinlichkeitsraum, in dem für alle $A \in \mathfrak{P}(N)$ gilt:

$$\mathbb{P}(A) := \prod_{i\in A} p_i \prod_{j\notin A}(1-p_j).$$

Dies können wir so verstehen: unabhängig voneinander wird für jedes $i \in N$ mit Wahrscheinlichkeit p_i entschieden, ob es in A ist. Für jedes $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(N)$ schreiben wir dann die Wahrscheinlichkeit als $\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A)$. Insbesondere gilt, wenn alle $p_i = 1/2$, $\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(\mathcal{A})$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ wie im Kleitmanschen Lemma (1.4). Daß $\mathfrak{P}(N)$ mit $\mathbb{P}$ tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, müssen wir noch überprüfen. Daß die z. B. $\mathbb{P}(\mathfrak{P}(N)) = 1$ gilt sieht man mit Induktion nach n, Subadditivität folgt direkt nach Definition.

Beispiel 1.5. Seien $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $p = (1, 1/2, 3/4, 0)$, $A = \{1, 2, 4\}$, $A' = \{1, 2, 3\}$, $A'' = \{1, 2\}$, $\mathcal{A} = \{N, A, A', A''\}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N) &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \\
\mathbb{P}(A) &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{3}{4} = 0 \\
\mathbb{P}(A') &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8} \\
\mathbb{P}(A'') &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8} \\
\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) &= \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') + \mathbb{P}(A'') \\
&= 0 + 0 + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Wir definieren nun $\mu = \mu_p \colon \mathfrak{P}(N) \to \mathbb{R}^+$:

$$\mu(A) = \mathbb{P}_p(A) = \prod_{i \in A} p_i \prod_{j \notin A} (1 - p_j).$$

Wir sehen leicht, daß μ log-supermodular ist, denn für die definierende Ungleichung gilt sogar Gleichheit: seien $A, B \subseteq N$, dann

$$\mu(A)\mu(B) = \mu(A \cap B)\mu(A \cup B).$$

Die $i \in N$, die in A und B vorkommen, werden auf der linken Seite doppelt gezählt und kommen durch $\mu(A \cap B)$ auch rechts nochmals vor. Somit können wir zum Beweis des folgenden Satzes die FKG-Ungleichung wieder anwenden. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung vom Kleitmanschen Lemma (1.4).

Satz 1.6. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei monoton steigende Familien von Teilmengen von $N = \{1, \dots, n\}$ und $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ monoton fallende Familien von Teilmengen von N. Außerdem sei $p = (p_1, \dots, p_n)$ mit $0 \le p_i \le 1$ ein reeller Vektor. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) &\ge \mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{B}) \\
\mathbb{P}_p(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) &\ge \mathbb{P}_p(\mathcal{C})\mathbb{P}_p(\mathcal{D}) \\
\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) &\le \mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{C})
\end{aligned}$$

Beweis. Für die erste Ungleichung nehmen wir wieder f und g, die charakteristischen Funktionen von oben, sie sind immer noch steigend und es gilt

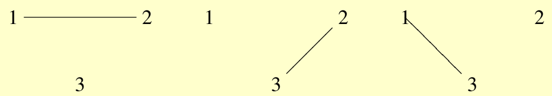
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) &= \frac{\overbrace{\sum_{A\in\mathfrak{P}(N)} f(A)g(A)\prod_{i\in A} p_i \prod_{j\notin A}(1-p_j)}^{=\mathbb{P}_p(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}}{\underbrace{\sum_{A\in\mathfrak{P}(N)} \prod_{i\in A} p_i \prod_{j\notin A}(1-p_j)}_{=1}} = \langle fg\rangle \geq \langle f\rangle\langle g\rangle \\ &= \mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{B})\end{aligned}$$

Die beiden anderen Ungleichungen zeigt man ganz analog. □

Dieser Satz wird uns später wieder begegnen, z. B. in Kapitel 8, wo wir die Jansonsche Ungleichung herleiten werden.

Definition 1.7 (Eigenschaft von Graphen)**.** *Sei V eine endliche Menge, Q eine Teilmenge aller Graphen auf V, die unter Isomorphismen geschlossen ist. Dann heißt Q* Eigenschaft *von Graphen.*

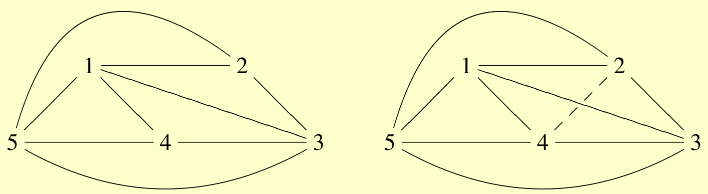
Beispiel 1.8. Seien $V = \{1,2,3\}$, $E_1 = \{\{1,2\}\}, E_2 = \{\{2,3\}\}, E_3 = \{\{1,3\}\}$. Dann ist $\{(V,E_1),(V,E_2),(V,E_3)\}$ eine Eigenschaft.



Allgemein sind *Zusammenhang* oder *Planarität* Eigenschaften.

Definition 1.9 (Monotone Eigenschaften)**.** *Eine Eigenschaft Q von Graphen auf V heißt* monoton steigend, *wenn mit $G \in Q$, $E_G \subseteq E_H$ gilt $H \in Q$. Eine Eigenschaft Q von Graphen auf V heißt* monoton fallend, *wenn mit $G \in Q$, $E_H \subseteq E_G$ gilt $H \in Q$.*

Beispiel 1.10. Planarität ist monoton fallend, Hamiltonität monoton steigend. Ein Graph, der sich ohne Selbstüberschneidungen in die Ebene einbetten läßt, verliert diese Eigenschaft nicht, wenn man Kanten entfernt, erhält sie aber natürlich nicht notwendig, wenn man neue Kanten hinzufügt:



Hier läßt sich die Kante $\{2,4\}$ nicht ohne Selbstüberschneidung einfügen[1]). Umgekehrt kann man natürlich, wenn man in einem Graphen einen Hamilton-Zykel gefunden hat, beliebig weitere Kanten hinzufügen, ohne daß sich diese Eigenschaft ändert.

Wir können nun die Menge N als die $n = \binom{m}{2}$ verschiedenen Kanten über dem vollständigen Graphen auf $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ betrachten. Wir erzeugen den den Zufallsgraphen $G = (V, E)$, indem für alle $i, j \in V, i \neq j$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p $\{i, j\} \in E$ ist. Somit bekommen wir folgenden Satz:

Satz 1.11. *Seien Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 Eigenschaften von Graphen, mit Q_1, Q_2 monoton steigend und Q_3, Q_4 monoton fallend. Sei $G = (V, E)$ ein Zufallsgraph auf V mit jeweils unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p gewählten Kanten. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G \in Q_1 \cap Q_1) &\geq \mathbb{P}(G \in Q_1)\mathbb{P}(G \in Q_2) \\
\mathbb{P}(G \in Q_3 \cap Q_4) &\geq \mathbb{P}(G \in Q_3)\mathbb{P}(G \in Q_4) \\
\mathbb{P}(G \in Q_1 \cap Q_3) &\leq \mathbb{P}(G \in Q_1)\mathbb{P}(G \in Q_3)
\end{aligned}$$

Somit erhält man z. B., daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Graph sowohl Hamiltonisch als auch planar nicht größer ist als das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

2 Lineare Erweiterungen von Mengen mit Halbordnung

Nun wollen wir ein ähnliches Resultat wie die vorhergehenden (nämlich die positive Korrelation von zwei Ereignissen) auf Mengen mit Halbordnungen zeigen. Wir beginnen unsere Betrachtung mit einer

Definition 2.1 (Lineare Erweiterung)**.** *Sei $(P, \leq)$ eine Menge mit Halbordnung und n Elementen. Eine* lineare Erweiterung *von P ist eine bijektive Abbildung $\sigma\colon P \to \{1, 2, \ldots, n\}$, die die Ordnung erhält, d. h.*

$$x, y \in P, \; x \leq y \;\Rightarrow\; \sigma(x) \leq \sigma(y).$$

σ ist also eine Rangfolge der Elemente von P, die die Halbordnung erhält.

Beispiel 2.2. Sei $P = \{a, b, c, d\}$, es gelten $a \leq b \leq c$, $a \leq d \leq c$. Dann sind

$$\begin{aligned}
\sigma\colon P &\to \{1, 2, 3, 4\}, \quad a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 4, d \mapsto 3 \qquad \text{und} \\
\tau\colon P &\to \{1, 2, 3, 4\}, \quad a \mapsto 1, b \mapsto 3, c \mapsto 4, d \mapsto 2
\end{aligned}$$

lineare Erweiterungen von P.

[1] Der rechts dargestellte Graph ist ein K_5. Tatsächlich kann man zeigen, daß alle Graphen, die einen K_5 oder einen $K_{3,3}$ (vollständiger bipartiter Graph mit $2 \cdot 3$ Knoten) enthalten, nicht einbettbar sind. Es gilt sogar die Umkehrung, d. h. ein Graph ist in die Ebene einbettbar, wenn er weder einen K_5 noch einen $K_{3,3}$ enthält! Man fühle sich erinnert an das Problem, drei Häuser mit Gas-, Strom- und Wasserwerk zu verbinden, ohne daß sich die Leitungen überkreuzen, um kein schlechtes Chi zu erzeugen. Siehe [2]

Beispiel 2.3. Wir betrachten $\mathbb{Z}^2$ mit der lexikographischen Ordnung, d. h.

$$(a,b) \leq (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a \leq c \wedge b \leq d.$$

Betrachten wir die Teilmenge $M := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3\}$. Diese können wir uns in folgendem Graphen darstellen:

$$\begin{tikzcd}
(2,1) \arrow[d] & (2,2) \arrow[l] \arrow[d] & (2,3) \arrow[l] \arrow[d] \\
(1,1) & (1,2) \arrow[l] & (1,3) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

wobei Pfeile in Richtung des kleineren Elements zeigen. Es gilt also $n = |M| = 6$. Eine mögliche Erweiterung ist gegeben durch

(a,b)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$\sigma(a,b)$	1	2	3	4	5	6

,

eine weitere durch

(a,b)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$\tau(a,b)$	1	3	5	2	4	6

.

Man kann immer solche linearen Erweiterungen finden: Man macht eine Induktion nach n, der Anzahl der Elemente von P. Für $n = 1$ ist die Erweiterung klar. Man habe nun also für $|P| = n - 1$ eine Erweiterung σ gefunden. Sei $P' = P \cup \{x_n\}$. Man sucht sich das Minimum $m := \min\{\sigma(x) \mid x_n \leq x \in P\}$. Die Abbildung $\sigma'(x) := \begin{cases} \sigma(x) & x \leq x_0,\ x \neq x_0 \\ m & x = x_0 \\ \sigma(x) + 1 & x_0 \leq x \end{cases}$ ist dann auch wieder eine lineare Erweiterung.

Für eine beliebige lineare Erweiterung σ von P kann man nun untersuchen, ob $\sigma(x) \leq \sigma(y)$ gilt. Das muß – wie im Beispiel für $\sigma(1,3) \leq \sigma(2,2)$ aber $\tau(1,3) > \tau(2,2)$ – nicht immer erfüllt sein. Interessant ist dies, wenn man die Menge aller möglichen linearen Erweiterungen als Wahrscheinlichkeitsraum und $x \leq y$ in einer solchen Erweiterung als Ereignis auffaßt. Was passiert nun, wenn man die Korrelation der Ereignisse $x \leq y$ und $x \leq z$ untersucht? Wir erhalten folgenden Satz:

Satz 2.4 (Rival, Sands und Shepp). *Sei $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine Menge mit Halbordnung und n Elementen. Dann gilt im Raum der linearen Erweiterungen:*

$$\mathbb{P}(a_1 \leq a_2 \wedge a_1 \leq a_3) \geq \mathbb{P}(a_1 \leq a_2)\mathbb{P}(a_1 \leq a_3).$$

Beweis. Wir werden den Satz mittels der FKG-Ungleichung beweisen. Dazu müssen wir uns einen geeigneten Verband basteln, außerdem benötigen wir noch geeignete Funktionen f, g, μ. Kümmern wir uns zuächst um den Verband: Sei m eine große ganze Zahl (die später gegen unendlich laufen wird). Sei weiterhin L die Menge aller geordneten n-Tupel $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$x_i \in M = \{1, \ldots, m\}$. Dabei müssen die x_i nicht verschieden sein. Wir definieren eine Ordnungsrelation auf L wie folgt:

$$\mathfrak{x} \le \mathfrak{y} \;:\Longleftrightarrow\; \begin{cases} x_1 \ge y_1 \\ x_i - x_1 \le y_i - y_1 & \text{für } 2 \le i \le n \end{cases}$$

Diese merkwürdige Ordnung wählen wir uns deshalb, weil wir später aus $\mathfrak{x} \le \mathfrak{y}$ folgern wollen $x_2 - x_1 \le y_2 - y_1$.

Beispiel 2.5. Seien $n = 2$ und $m = 3$, dann erhalten wir $m^n = 9$ Elemente in L, die wie folgt geordnet sind:

$$\begin{tikzcd}
 & & (2,1) \arrow[dl] & & (1,1) \arrow[dl] & & \\
(3,1) & (3,2) \arrow[l] & & (2,2) \arrow[ul] \arrow[dl] & & (1,2) \arrow[ul] \arrow[dl] & (1,3) \arrow[l] \\
 & & (3,3) \arrow[ul] & & (2,3) \arrow[ul] & &
\end{tikzcd},$$

wobei Pfeile in Richtung der kleineren Elemente zeigen.

Wir überprüfen, daß es sich bei L um einen Verband handelt, mit

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y})_i = \min(x_i - x_1, y_i - y_1) + \max(x_1, y_1) \\ \text{und} \qquad & (\mathfrak{x} \vee \mathfrak{y})_i = \max(x_i - x_1, y_i - y_1) + \min(x_1, y_1). \end{aligned}$$

(Wir zeigen dies nur für $\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}$, die andere Rechnung geht analog). Seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{v} \in L$, es gelte $\mathfrak{z} \le \mathfrak{x}, \mathfrak{z} \le \mathfrak{y}, \mathfrak{v} = \mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}$. Es gilt $\mathfrak{x} \ge \mathfrak{v} \le \mathfrak{y}$. Auch gilt $x_1 \le z_1 \ge y_1$ und $v_1 = \max(x_1, y_1)$, also $v_1 \le z_1$. Für die anderen Komponenten gilt folgendes: $x_i - x_1 \ge z_i - z_1 \le y_i - y_1$, $v_i = \min(x_i - x_1, y_i - y_1) + \max(x_1, y_1)$, somit also $v_i - v_1 = \min(x_i - x_1, y_i - y_1)$, daraus folgt dann $z_i - z_1 \le v_i - v_1$. Damit haben wir nach langem Rechnen $\mathfrak{z} \le \mathfrak{v} = \mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y} \; \forall \mathfrak{z} \le \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. $\mathfrak{v}$ ist also größte untere Schranke.

Nun wollen wir auch noch sehen, daß L ein distributiver Verband ist. Seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in L$. Wir müssen zeigen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{x} \wedge (\mathfrak{y} \vee \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}) \vee (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{z}) \\ \text{und} \quad & \mathfrak{x} \vee (\mathfrak{y} \wedge \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x} \vee \mathfrak{y}) \wedge (\mathfrak{x} \vee \mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Wir wollen wieder nur die erste Rechnung geben:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x} \wedge (\mathfrak{y} \vee \mathfrak{z}))_i &= \min(x_i - x_1, (\mathfrak{y} \vee \mathfrak{z})_i - (\mathfrak{y} \vee \mathfrak{z})_1) + \max(x_1, (\mathfrak{y} \vee \mathfrak{z})_1) \\ &= \min(x_i - x_1, \max(y_i - y_1, z_i - z_1)) + \max(x_1, \min(y_1, z_1)) \end{aligned}$$

auch gilt

$$\begin{aligned} ((\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}) \vee (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{z}))_i &= \max((\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y})_i - (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y})_1, (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{z})_i - (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{z})_1) + \min((\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y})_1, (\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{z})_1) \\ &= \max(\min(x_i - x_1, y_i - y_1), \min(x_i - x_1, z_i - z_1)) \\ &\quad + \min(\max(x_1, y_1), \max(x_1, z_1)) \end{aligned}$$

Für beliebige ganze Zahlen a, b, c gilt nun aber

$$\begin{aligned} & \min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c)) \\ \text{und} \quad & \max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \min(a, c)) \end{aligned}$$

mit $a = x_i - x_1$, $b = y_i - y_1$ und $c = z_i - z_1$ folgt die Behauptung.

Um nun die FKG-Ungleichung anwenden zu können, benötigen wir die log-supermodulare Funktion μ und die steigenden Funktionen f und g.

Sei μ die charakteristische Funktion von P, also für $\mathfrak{x} \in L$ sei

$$\mu(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a_i \leq a_j \Rightarrow x_i \leq x_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir müssen nun überprüfen, daß μ log-supermodular ist. Dazu reicht es zu sehen, daß $\mu(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{y}) = 1 \;\Rightarrow\; \mu(\mathfrak{x} \vee \mathfrak{y}) = \mu(\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}) = 1$ gilt. Wenn $\mu(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{y}) = 1$ und $a_i \leq a_j$ in P, dann haben wir auch $x_i \leq x_j$ und $y_i \leq y_j$ und damit

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x} \vee \mathfrak{y})_i &= \max(x_i - x_1, y_i - y_1) + \min(x_1, y_1) \\ &\leq \max(x_j - x_1, y_j - y_1) + \min(x_1, y_1) = (\mathfrak{x} \vee \mathfrak{y})_j\end{aligned}$$

also $\mu(\mathfrak{x} \vee \mathfrak{y}) = 1$. Ebenso zeigt man $\mu(\mathfrak{x}) = 1 = \mu(\mathfrak{y}) \Rightarrow \mu(\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}) = 1$.

Wir definieren uns nun die Funktionen f und g als die charakteristischen Funktionen für die Ereignisse $x_1 \leq x_2$ beziehungsweise $x_1 \leq x_3$. Es gelte also

$$f(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 1 & x_1 \leq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 1 & x_1 \leq x_3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen f und g sind beide monoton steigend: wenn gilt $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{y}$ und $f(\mathfrak{x}) = 1$, dann gilt damit auch $0 \leq x_2 - x_1 \leq y_2 - y_1$ und somit $f(\mathfrak{y}) = 1$; für g gilt ähnliches.

Wir haben uns nun die Voraussetzungen für die FKG-Ungleichung zusammengesucht. Sei nun $(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-Tupel aus L, das die Ungleichungen in P erfüllt (d. h. $a_i \leq a_j \Rightarrow x_i \leq x_j$ für $a_i, a_j \in P$ und $x_i, x_j \in L$). Dann gilt

$$\mathbb{P}(x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \leq x_3) = \frac{\sum_{\mathfrak{x}\in L} f(\mathfrak{x})g(\mathfrak{x})\mu(\mathfrak{x})}{\sum_{\mathfrak{x}\in L}\mu(\mathfrak{x})} \geq \frac{\sum_{\mathfrak{x}\in L} f(\mathfrak{x})\mu(\mathfrak{x})}{\sum_{\mathfrak{x}\in L}\mu(\mathfrak{x})} \frac{\sum_{\mathfrak{x}\in L}\mu(\mathfrak{x})g(\mathfrak{x})}{\sum_{\mathfrak{x}\in L}\mu(\mathfrak{x})} = \mathbb{P}(x_1 \leq x_2)\mathbb{P}(x_1 \leq x_3).$$

Das ist noch nicht ganz das, was wir wollen. Die n-Tupel in L können auch gleiche Einträge besitzen und entsprechen somit nicht den linearen Erweiterungen von P. Dies reparieren wir dadurch, daß wir m gegen unendlich laufen lassen. Somit geht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zu $i \neq j$ gilt $x_i = x_j$ gegen 0 und die Behauptung folgt. □

3 Die probabilistische Lupe: TURÁNS Theorem

Definition 3.1 (Totalordnung)**.** *Sei M eine Menge. Eine* Totalordnung *auf M ist eine Relation, so daß gilt*

$$\text{entweder} \quad a < b \quad \text{oder} \quad b < a \quad \forall a, b \in M$$

Wir erinnern uns an folgende

Definition 3.2 (Grad, Unabhängigkeit, $\alpha(G)$)**.** *In einem Graphen $G = (V, E)$ mit $v \in V$ heißt $d_v := |\{e \in E \mid v \in e\}|$ der* Grad *von v. Eine Menge $U \subseteq V$ heißt* unabhängig *genau dann, wenn gilt $\{v, w\} \notin E \; \forall v, w \in U$. Die Zahl*

$$\alpha(G) = \max_{\substack{U \subseteq V, \\ U \text{ unabhängig}}} \{|U|\}$$

heißt Unabhängigkeitszahl *von G.*

Offenbar sinkt die Unabhängigkeitszahl mit dem Grad der Vernetzung, für die der Grad der Knoten wichtig ist. Konkreter beweisen wir zunächst folgenden Zusammenhang zwischen der Unabhängigkeitszahl und dem Grad der Knoten:

Satz 3.3. *Für beliebige Graphen $G = (V, E)$ gilt*

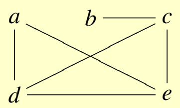
$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Beweis. Sei $<$ eine Totalordnung auf V, die uniform aus der Menge der Totalordnungen auf V ausgewählt wurde. Wir definieren

$$I := \{v \in V : \ \forall w \in V : \ \{v, w\} \in E \Rightarrow v < w\}$$

Das ist die Menge aller Knoten, die unter ihren Nachbarn die kleinsten sind.

Beispiel 3.4. In



mit $e < b < d < a < c$ ist $I = \{b, e\}$. Die Summe aus der Behauptung ist für diesen Graphen $s = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} \leq 2$. Somit gilt wohl $\alpha(G) \geq 2$, und I ist eine solche unabhängige Menge. Man prüft leicht nach, daß hier auch Gleichheit gilt.

Sei X_v die Indikatorzufallsvariable für das Ereignis $v \in I$ und $X := \sum_{v \in V} X_v = |I|$. Es gilt für jedes v

$$\mathbb{E}(X_v) = \mathbb{P}(v \in I) = \frac{1}{d_v + 1},$$

denn die Menge $\{v$ und seine Nachbarn$\}$ hat genau $d_v + 1$ Elemente, und jedes ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit das kleinste. Damit gilt – wieder einmal die Linearität von $\mathbb{E}$ ausnützend –

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Somit gibt es also eine spezielle Ordnung $<$ mit

$$|I| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Angenommen, I sei nicht unabhängig, also $x, y \in I$ und $\{x, y\} \in E$, dann gilt sowohl $x < y$ als auch $y < x$, im Widerspruch zur totalen Ordnung. Somit ist mit I eine unabhängige Menge gefunden und

$$\alpha(G) \geq |I|.$$

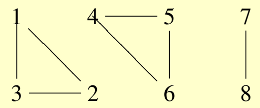
□

Seien $m \leq n$ beliebig gewählt, für q und r gelte $n = mq + r, 0 \leq r < m$ und es sei

$$e := r\binom{q+1}{2} + (m - r)\binom{q}{2}.$$

Wir definieren den Graphen $G = G_{n,e}$ auf n Knoten mit e Kanten, indem wir die Knotenmenge so gleichmäßig wie möglich in m Klassen teilen und zwei Knoten genau dann verbinden, wenn sie in der selben Klasse liegen. Offenbar gilt $\alpha(G_{n,e}) = m$.

Beispiel 3.5. Seien $n = 8$, $m = 3$, dann sind $q = 2 = r$ und $e = 2\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 7$. Wir erhalten folgenden Graphen:



Satz 3.6 (Turán (1941)). *Sei H ein Graph mit n Knoten und e Kanten (es muß also m, q und r geben, so daß die obigen Bedingungen erfüllt sind!). Dann gilt $\alpha(H) \geq m$ und $\alpha(H) = m \iff H \cong G_{n,e}$.*

Beweis. Für $G_{n,e}$ gilt $\sum_{v \in V}(d_v + 1)^{-1} = m$, weil jede Clique 1 zu der Summe beiträgt. Mit festem $e = \sum_{v \in V} d_v/2$ wird $\sum_{v \in V}(d_v + 1)^{-1}$ mit den d_v am nächsten beieinander minimiert. Also gilt für alle H

$$\alpha(H) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1} \geq m.$$

Die Rückrichtung der zweiten Behauptung ist trivial, wir zeigen also „$\Rightarrow$“: Sei $\alpha(H) = m$, dann haben wir Gleichheit auf beiden Seiten dieser Ungleichung. Die rechte Gleichheit impliziert, daß die d_v so nah aneinander wie möglich sind. Wir wählen uns wieder eine Totalordnung aus der Menge der möglichen aus und setzen $X = |I|$ wie im letzten Satz. Wir nehmen auch an $\alpha(H) = \mathbb{E}(X) = m$. Da aber $\alpha(H) \geq X$ für alle möglichen Ordnungen $<$ gilt, muß X konstant sein. Wir nehmen nun an, H sei keine disjunkte Vereinigung von Cliquen. Dann gibt es $x, y, z \in V$ mit $\{x, y\}, \{x, z\} \in E$, $\{y, z\} \notin E$. Sei $<$ eine Ordnung, die mit $x < y < z$ beginne, und $<'$ die gleiche Ordnung, außer, daß sie mit $y < z < x$ beginnt. Seien I und I' die Mengen von oben, die alle Knoten enthalten, deren Nachbarn alle größer sind als sie selbst. Dann sind I und I' identisch bis auf $x \in I$, $y, z \notin I$ aber $x \notin I'$, $y, z \in I'$. Somit ist X nicht konstant im Widerspruch zur Voraussetzung. Also impliziert $\alpha(H) = \mathbb{E}(X)$, daß H die Vereinigung von Cliquen ist, und somit gilt $H \cong G_{n,e}$. □

Literatur

[1] Alon, N. and J.H. Spencer: *The Probabilistic Method*. Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley, 2nd ed., 2000, ISBN 0-471-37046-0. http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/spencer/nogabook/nogabook.html, visited on 11/16/2005.

[2] Diestel, R.: *Graphentheorie*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2. Aufl., 2000 (1996), ISBN 3-540-67656-2. http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/, besucht: 11/16/2005.