Funktionalanalysis

Prof. Dr. Konrad Schmüdgen*

Wintersemester 2005

Vorlesungsmitschrift von Jonas Zimmermann†
Version $1-\varepsilon$ vom 19. März 2006, 3:20

*Univ. Leipzig
†Vielen Dank an Uli Grampp, Kai Oelbermann und Annegret Schalke für Korrekturen und Hinweise

Inhaltsverzeichnis

I. Normierte lineare Räume und Hilberträume **1**
1. Metrische Räume . . . 1
   a. Einige topologische Grundbegriffe . . . 1
2. Banachräume . . . 3
   a. Definitionen . . . 3
   b. Beispiele . . . 4
   c. L^p-Räume . . . 4
   d. Äquivalenz von Normen . . . 5
3. Hilberträume . . . 6
   a. Norm und Skalarprodukt . . . 8
4. Sätze von Riesz . . . 9
   a. Definitionen . . . 9
   b. Erster Satz von Riesz . . . 10
   c. Zweiter Satz von Riesz . . . 12
5. Orthonormalsysteme und Fourierentwicklung im Hilbertraum . . . 13
   a. Orthonormalsysteme . . . 13
   b. Fourierentwicklung von Elementen im Hilbertraum . . . 14
   c. Existenz von Orthonormalbasen in separablen Hilberträumen . . . 16
   d. Anwendung auf klassische Fourierreihen . . . 18
   e. Andere Aussagen über Konvergenz von klassischen Fourierreihen . . . 18

II. Grundprinzipien der Funktionalanalysis **20**
1. Das Baire'sche Kategorietheorem . . . 20
2. Stetige lineare Abbildungen von normierten Räumen . . . 22
   a. Stetige und beschränkte Abbildungen . . . 22
   b. Operatornorm . . . 23
   c. Der duale Raum . . . 26
3. Das Banach-Steinhaus-Theorem . . . 28
   a. Das Banach-Steinhaus-Theorem . . . 28
   b. Folgerungen aus Banach-Steinhaus . . . 28
4. Sätze von der offenen Abbildung und vom geschlossenen Graphen . . . 30
   a. Satz von der offenen Abbildung . . . 30
   b. Satz vom abgeschlossenen Graphen . . . 32
5. Der Satz von Hahn-Banach . . . 33
   a. Lemma von Zorn . . . 33
   b. Hahn-Banach-Theorem für reelle Vektorräume . . . 33
   c. Hahn-Banach-Theorem für komplexe Vektorräume . . . 35
   d. Anwendung auf die Existenz „hinreichend vieler“ stetiger linearer Funktionale . . . 36

III. Beschränkte lineare Operatoren im Hilbertraum **40**
1. Adjungierte, selbstadjungierte und unitäre Operatoren 40
   a. Selbstadjungierte Operatoren 42
   b. Unitäre und isometrische Operatoren 44
2. Projektionsoperatoren 47
   a. Definition und Charakterisierung von Projektionsoperatoren 47
   b. Eigenschaften von Projektionsoperatoren 48
3. Konvergenzen von Elementen und Operatoren 49
   a. Konvergenz von Elementen 49
   b. Konvergenz von Operatoren 50
4. Spektrum und Resolvente beschränkter linearer Operatoren im Hilbertraum . . 51
   a. Definitionen 51
   b. Eigenschaften des Spektrums 53
   c. Spektrum selbstadjungierter Operatoren 56
   d. Monotone selbstadjungierte Operatoren 59
5. Kompakte Operatoren im Banachraum 60
   a. Kompakte und vollstetige Operatoren 60
   b. Kompakte Operatoren im Hilbertraum 63
   c. Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz 65
   d. Anwendung auf Hilbert-Schmidt'sche Integraloperatoren 66

IV. Das Spektraltheorem für beschränkte selbstadjungierte Operatoren **68**
1. Spektralscharen 69
   a. Definition und Beispiele 69
   b. Einfache Eigenschaften 70
   c. Operatorwertige Stieltjes-Integrale 71
2. Funktionalkalkül beschränkter selbstadjungierter Operatoren 74
   a. Zwei Lemmata 74
   b. Stetiger Funktionalkalkül für beschränkte selbstadjungierte Operatoren 75
   c. Das Spektraltheorem 76
   d. Spektrum und Spektralschar 80
   e. Existenz einer Quadratwurzel 81
   f. Meßbarer Funktionalkalkül 82
   g. Polarzerlegung beschränkter Operatoren 84

Liste der Sätze und Lemmata

Satz I. 1. 14. Vervollständigung 2
Satz I. 2. 5. Hölder-, Minkowski-Ungleichungen 4
Satz I. 2. 6. von Riesz-Fischer 5
Satz I. 3. 3. Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung 6
Satz I. 3. 6. Parallelogrammidentität 8
Satz I. 4. 7. Erster Satz von Riesz 11
Satz I. 4. 11. Zweiter Satz von Riesz 12
Lemma I. 5. 2. Satz des Pythagoras 14
Satz I. 5. 5. Besselsche Ungleichung 14
Satz I. 5. 11. Existenzkriterium 17
Satz II. 1. 3. Baire'sches Kategorietheorem 20
Satz II. 3. 1. Banach-Steinhaus 28
Satz II. 4. 1. Offene Abbildung 30
Satz II. 4. 6. vom abgeschlossenen Graphen, Closed Graph Theorem 32
Lemma II. 5. 2. von Zorn 33
Satz II. 5. 4. von Hahn-Banach 34
Satz II. 5. 5. von Hahn-Banach für komplexe Vektorräume 36
Satz II. 5. 14. Trennungssatz von Hahn-Banach 39
Satz III. 1. 1. Adjungierter Operator 40
Satz III. 2. 2. Projektionsoperator 47
Lemma III. 4. 7. Neumann'sche Reihe 54
Satz III. 5. 7. von Schauder 63
Satz III. 5. 8. von Riesz-Schauder 63
Satz III. 5. 11. Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz 65
Lemma IV. 1. 3. stetige Sesquilinearformen 72
Lemma IV. 2. 1. Spektralabbildungssatz für Polynome 74
Lemma IV. 2. 2. Erweiterungssatz von Tietze 74
Satz IV. 2. 8. Spektraltheorem 76
Satz IV. 2. 10. Quadratwurzel 81
Satz IV. 2. 16. über die Polarzerlegung 85

Kapitel I.

Normierte lineare Räume und Hilberträume

1. Metrische Räume

Sei E eine Menge.

Definition I. 1. 1 *(Metrik)*. Eine *Metrik* auf E ist eine Abbildung $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in E$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in E$ ♡

Definition I. 1. 2 *(metrischer Raum)*. Ein *metrischer Raum* ist eine Menge E zusammen mit einer Metrik d. ♡

Beispiele I. 1. 1. (i) $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ mit E beliebig. (E, d) ist der diskrete metrische Raum.

(ii) $E \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$, $d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$. E heißt Euklidischer Raum.

(iii) Jeder normierte lineare Raum ist metrischer Raum mit $d(x, y) = \|x - y\|$. ✓

a. Einige topologische Grundbegriffe

Sei (E, d) metrischer Raum, $x \in E$, $\varepsilon > 0$.

Definition I. 1. 3 *(ε-Umgebung)*. $U_\varepsilon(x) = \{\, y \in E \mid d(x, y) \leq \varepsilon \,\}$ heißt *ε-Umgebung* von x. ♡

Definition I. 1. 4 *(innerer Punkt, offene Menge)*. Sei $M \subseteq E$. Ein Punkt $x \in E$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq M$. Eine Menge M heißt *offen*, wenn jeder Punkt von M innerer Punkt ist. ♡

Beispiel I. 1. 2. Sei E Menge mit diskreter Metrik, dann ist $M = \{x\}$ offen, denn

$$U_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subseteq M$$ ✓

Definition I. 1. 5 ***(Konvergenz).*** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in E$ *konvergiert*, wenn es ein $x \in E$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. x heißt Grenzwert oder Limes. ♡

Definition I. 1. 6 ***(abgeschlossen).*** Eine Menge $M \subseteq$ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle konvergenten Folgen von Elementen aus M die Grenzelemente zu M gehören. ♡

Satz I. 1. 7. Jede konvergente Folge eines metrischen Raumes besitzt nur einen Grenzwert.

Beweis: Seien $x, x' \in E$ Grenzwerte der Folge (x_n). Wir zeigen: $x = x'$.

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') = d(x_n, x) + d(x_n, x') \\
& 0 \leq d(x, x') \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) + d(x_n, x') = 0 + 0 \\
\Rightarrow \quad & x = x'
\end{aligned}
$$

//

Definition I. 1. 8 ***(Cauchyfolge).*** Eine Folge (x_n) aus (E, d) heißt *Cauchyfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_\varepsilon$. ♡

Satz I. 1. 9. Jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.

Beispiel I. 1. 3. Nicht jede Cauchyfolge konvergiert: Sei $E = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$. $(\frac{1}{n})$ ist Cauchyfolge, konvergiert jedoch nicht. ✓

Definition I. 1. 10 ***(vollständig).*** (E, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in E konvergiert. ♡

Bemerkung I. 1. 4. Für vollständige metrische Räume gilt das Cauchy'sche Konvergenzkriterium.

Beispiel I. 1. 5. Seien $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = [0, 1]$, $E_3 =]0, 1[$, $E_4 = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$. E_1 und E_2 sind vollständig, $E - 3$ und E_4 nicht. ✓

Definition I. 1. 11 ***(kompakt).*** Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes E heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt. ♡

Satz I. 1. 12. Für $M \subseteq E$ sind äquivalent:

(i) M kompakt

(ii) $\forall\, (x_n)$ in M existiert eine in M konvergente Teilfolge

Definition I. 1. 13 ***(Teilraum).*** Sei (E, d) metrischer Raum. Es sei $E_1 \subseteq E$ und $d_1 = d|_{E_1\times E_1}$, dann ist E_1 metrischer Raum. E_1 heißt *Teilraum.*

Satz I. 1. 14 ***(Vervollständigung).*** Sei (E, d) metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum (E_0, d_0) derart, daß (E, d) ein Teilraum von (E_0, d_0) ist. Man kann auch erreichen, daß E_0 der Abschluß von E im Raum E_0 ist.

Satz I. 1. 15. Sei (E, d) metrischer Raum, $M \subseteq E$.

(i) M kompakt $\Rightarrow$ M abgeschlossen und beschränkt

(ii) M kompakt, $M_1 \subseteq M$ abgeschlossen $\Rightarrow$ M_1 kompakt

Bemerkung I. 1. 6. Abgeschlossene und beschränkte Mengen sind i. a. nicht kompakt.

Satz I. 1. 16. Sei $E = \mathbb{R}^n$, $M \subseteq E$. Dann M kompakt $\iff$ M abgeschlossen und beschränkt.

Definition I. 1. 17 *(dicht)*. Sei $M \subseteq E$. M heißt *dicht* in E genau dann, wenn $\overline{M} = E$, d. h.

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M \text{ mit } d(x, y) < \varepsilon.$$ ♡

Beispiel I. 1. 7. $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$. ✓

2. Banachräume

a. Definitionen

Im folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, E sei Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Definition I. 2. 1 *(Norm)*. Eine *Norm* auf E ist eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ mit

(i) $\|x\| \geq 0\ \forall x \in E$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in E$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \ \forall x, y \in E$ ♡

Definition I. 2. 2 *(normierter linearer Raum)*. Ein *normierter linearer Raum* ist ein Vektorraum versehen mit Norm $\|\cdot\|$. ♡

Satz I. 2. 3. E sei normierter linearer Raum, $d(x, y) := \|x - y\|\ \ x, y \in E$, dann ist d Metrik und (E, d) ein metrischer Raum.

Beweis:

$$d(x, y) = \|x - y\| = |-1|\, \|y - x\| = d(y, x)$$
$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$ //

Definition I. 2. 4 *(Banachraum)*. Ein vollständiger normierter linearer Raum heißt *Banachraum.* ♡

b. Beispiele

Beispiel I. 2. 1. $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. Definiere

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_3 = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|$$

sind Normen, $(E, \|\cdot\|_i)$ sind Banachräume. ✓

Beispiel I. 2. 2. X sei kompakter metrischer Raum (z. B. $I = X = [0, 1]$). $E = C(X)$, der Vektorraum aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X. Für $f \in E$ sei

$$\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|\,.$$

$\|\cdot\|$ ist Norm, $(E, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum. ✓

Beispiel I. 2. 3. $E = C^n\,[a, b]$ sei Vektorraum aller n-mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf $[a, b]$. Dabei seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Für $f \in E$ sei

$$\|f\| := \max_{k=0,\ldots,n} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right|,$$

wobei $f^{(0)}(x) = f(x)$. $(E, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum. ✓

c. L^p-Räume

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, er sei vollständig, d. h. wenn $N \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N$, $\mu(N) = 0 \Rightarrow M \in \mathcal{A}$. Sei $p \in [1, \infty[$. Dann sei $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ die Menge der komplexwertigen μ-meßbaren Funktionen auf X, wobei $|f(x)|^p$ μ-integrierbar ist. Für $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ sei $\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

$\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ sei die Menge der komplexwertigen meßbaren Funktionen f auf X, sodaß $\exists c > 0 :$ $|f(x)| \le c$ μ-fastüberall. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf_{\substack{N\in\mathcal{A}\\ \mu(N)=0}} \sup_{x\in X\setminus N} |f(x)|\,.$$

$\mathcal{N}_\mu$ sei der Vektorraum aller meßbaren Funktionen $X \to \mathbb{C}$, die μ-fastüberall Null sind:

$$\mathcal{N}_\mu := \{\, f \in \mathcal{L}^p(X, \mu) \;\big|\; f(x) = 0 \;\forall x \in A \;\forall A \in \mathcal{A} : \; \mu(A) > 0 \,\}\,.$$

Es gilt $\|f\|_p = 0 \iff f \in \mathcal{N}_\mu$ für $p \in [1, \infty[$.

Satz I. 2. 5 *(*Hölder-, Minkowski-*Ungleichungen).* (i) Sei $p \in\,]1, \infty[$. Sei $q \in\,]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \,\|g\|_q \qquad \text{(Hölder-Ungleichung)}$$

(ii)

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \forall p \in [1, \infty] \qquad \text{Minkowski-Ungleichung}$$

Dabei sind f, g meßbare Funktionen.

Aus (ii) folgt: $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $p \in [1,\infty]$ ist ein Vektorraum. $\|\cdot\|_p$ ist i. a. keine Norm auf $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, denn $\|f\|_p = 0\ \forall f \in \mathcal{N}_\mu$. Daher definieren wir auf $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $p \in [1,\infty]$:

$$f \sim g :\iff f - g \in \mathcal{N}_\mu \quad \text{(d. h. } f = g\ \mu\text{-fastüberall)}$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen $[f] = f + \mathcal{N}_\mu$ bezeichnen wir mit $L^p(X,\mu)$. Für $[f],[g] \in L^p(X,\mu)$ definieren wir:

$$[f]+[g] := [f+g] \qquad \lambda[f] := [\lambda f] \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

Damit wird $L^p(X,\mu)$ dann ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. $\|\cdot\|_p$ ist Norm, denn sei

$$0 = \|[f]\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \ (p<\infty) \ \Rightarrow\ f(x) = 0\ \mu\text{-fastüberall},$$

also $f \in \mathcal{N}_\mu$, $[f] = 0$. Damit ist $L^p(X,\mu)$ normierter linearer Raum für alle $p \in [1,\infty]$ (für $\|\cdot\|_\infty$ rechnet man ganz analog).

Satz I. 2. 6 *(von Riesz-Fischer)*. $(L^p(X,\mu),\|\cdot\|_p)$ ist vollständig, also Banachraum.

Die Konvergenz im Raum $(L^p,\|\cdot\|_p)$, $p \in [1,\infty[$ heißt

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f) = \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X |f_n(x)-f(x)|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Spezialfall: $\ell^p(\mathbb{N})$, $p \in [1,\infty]$. Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ sei das Zählmaß.

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n\in X} f_n, \qquad f = g \iff f_n = g_n\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\mathcal{L}^p(X,\mu) = L^p(X,\mu) =: \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^\infty |f_n|^p < \infty \right\}$. Dann definieren wir

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall p \in [1,\infty[$$

Für $p = \infty$ ist $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{ (f_n) \mid \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n| < \infty \}$ und $\|f\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n|$. Beispielsweise gilt $\left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^p(\mathbb{N})$ für $p > 1$, $\left(\frac{1}{n}\right) \notin \ell^1(\mathbb{N})$.

d. Äquivalenz von Normen

Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf dem Vektorraum E.

Definition I. 2. 7 *(äquivalent)*. Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen *äquivalent* genau dann, wenn $\exists c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ mit

$$\|x\|_1 \le c_1\|x\|_2 \quad \text{und} \quad \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in E$$ ♡

Satz I. 2. 8. Zwei Normen sind äquivalent $\iff$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus E gilt

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_2 = 0.$$

Äquivalente Normen auf Vektorraum E haben die gleichen Konvergenzbegriffe.

Satz I. 2. 9. Es seien $E = \mathbb{R}^n, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{C}^n, \mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind alle Normen auf E äquivalent.

Beweis: Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Basis des Vektorraumes E. $\forall x \in E\ \exists x_i \in \mathbb{K}:\ x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Für ein derartiges x sei $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, damit ist dann $\|\cdot\|_1$ Norm auf E. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige andere Norm auf E. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \le \|x_1 e_1\| + \cdots + \|x_n e_n\| \\ &= |x_1|\,\|e_1\| + \cdots + |x_n|\,\|e_n\| \\ &\le (|x_1| + \cdots + |x_n|) \underbrace{\max_{k=1,\ldots,n} \|e_k\|}_{=:c} = c\,\|x\|_1 .\end{aligned}$$

Betrachte $S = \{\, x \in E \mid \|x\|_1 = 1 \,\}$. S ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. $\|x\|$ ist stetige Funktion auf S, hat Minimum auf S. Sei $m = \|x_0\|$ mit $x_0 \in S$. Wäre $m = 0 \ \Rightarrow\ x_0 = 0$, aber $\|x_0\|_1 \neq 0$. Also $m > 0$.

$$\|x\| = \left\| \|x\|_1 \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \|x\|_1 \cdot \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|}_{\in S} \ge m\,\|x\|_1 .$$

Also $\|x\|_1 \le \frac{1}{m}\|x\|\ \ \forall x \neq 0$. Für $x = 0$ ist die Ungleichung trivial. //

3. Hilberträume

Definition I. 3. 1 *(Skalarprodukt).* Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei weiter E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ein *Skalarprodukt* auf E ist eine Abbildung $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \colon E \times E \to \mathbb{K}$ mit

(i) $\langle \lambda_1 x_1 + x_2 \,|\, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1 \,|\, y \rangle + \langle x_2 \,|\, y \rangle\ \forall \lambda_1 \in \mathbb{K}, x_1, x_2, y \in E$

(ii) $\langle x \,|\, y \rangle = \overline{\langle y \,|\, x \rangle}\ \forall x, y \in E$

(iii) $\mathbb{R} \ni \langle x \,|\, x \rangle \ge 0\ \forall x \in E, \quad \langle x \,|\, x \rangle = 0 \ \Rightarrow\ x = 0.$ ♡

Definition I. 3. 2 *(unitärer Raum).* Ein *unitärer Raum* (Prä-Hilbertraum) ist ein Vektorraum E über $\mathbb{K}$ versehen mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. ♡

Bemerkung I. 3. 1. Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt die Antilinearität in der zweiten Komponente.

Satz I. 3. 3 (Cauchy-Schwarz*'sche Ungleichung).* $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ sei ein unitärer Raum. Dann gilt

$$|\langle x \,|\, y \rangle|^2 \le \langle x \,|\, x \rangle \cdot \langle y \,|\, y \rangle \qquad \forall x, y \in E.$$

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y \,|\, x + \lambda y \rangle = \langle x \,|\, x \rangle + \lambda \overline{\langle x \,|\, y \rangle} + \overline{\lambda} \langle x \,|\, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y \,|\, y \rangle \\ &= \langle x \,|\, x \rangle - \frac{|\langle x \,|\, y \rangle|^2}{\langle y \,|\, y \rangle} - \frac{|\langle x \,|\, y \rangle|^2}{\langle y \,|\, y \rangle} + \frac{|\langle x \,|\, y \rangle|^2}{\langle y \,|\, y \rangle} \end{aligned}$$

mit $\lambda = -\frac{\langle x \,|\, y \rangle}{\langle y \,|\, y \rangle}$ falls $y \neq 0$. Für $y = 0$ ist die Behauptung trivial. //

Sei nun $\|x\| := \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$.

Satz I. 3. 4. $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf E.

Beweis: (Zeigen nur Dreiecksungleichung)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y \,|\, x + y \rangle = \langle x \,|\, x \rangle + \langle x \,|\, y \rangle + \overline{\langle x \,|\, y \rangle} + \langle y \,|\, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$ //

Definition I. 3. 5 *(Hilbertraum)*. Ein vollständiger unitärer Raum heißt *Hilbertraum*. ♡

Beispiele I. 3. 2. (i) $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E = \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$.

$$\langle x \,|\, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ ist Skalarprodukt und die assoziierte Norm ist die euklidische Norm. $(E, \|\cdot\|)$ ist vollständig, also Hilbertraum.

(ii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum. Es gilt $\|f\overline{g}\|_1 \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$ nach der Hölderschen Ungleichung. Für $f, g \in L^2(X, \mu)$ sei

$$\langle f \,|\, g \rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

Dies existiert, weil $\int \left| f(x)\overline{g(x)} \right| \, d\mu < \infty$ nach oben für $f, g \in L^2(X, \mu)$. $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $L^2(X, \mu)$. Wir definieren eine Norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f \,|\, f \rangle} = \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dies ist die L^2-Norm, und $L^2(X, \mu)$ ist ein Hilbertraum.

(iii) Für den Hilbertschen Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N})$ definieren wir $\langle f \,|\, g \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n}$. ✓

a. Norm und Skalarprodukt

Sei $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Dann ist $\|x\| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$ eine Norm. Sei nun $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf einem Vektorraum E. Gibt es ein Skalarprodukt $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_1$ mit $\|x\|_1 = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle_1}\ \forall x \in E$.

Sei $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf E. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt

$$4\,\langle x\,|\,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \tag{3.1}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$4\,\langle x\,|\,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 \quad \text{(Polarisationsgl.)} \tag{3.2}$$

Beweis (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \langle x+y\,|\,x+y\rangle - \langle x-y\,|\,x-y\rangle \\
&= \langle x\,|\,x\rangle + \langle x\,|\,y\rangle + \langle y\,|\,x\rangle + \langle y\,|\,y\rangle - \langle x\,|\,x\rangle + \langle x\,|\,y\rangle + \langle y\,|\,x\rangle - \langle y\,|\,y\rangle \\
&= 4\,\langle x\,|\,y\rangle
\end{aligned}$$

/

Satz I. 3. 6 *(Parallelogrammidentität)*. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem Vektorraum E. Es gibt ein Skalarprodukt $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ auf E mit $\|x\| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}\ \forall x \in E$ genau dann, wenn

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E \text{(Parallelogrammid.)} \tag{3.3}$$

Ist dies erfüllt, so ist das Skalarprodukt $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ durch $\|\cdot\|$ eindeutig bestimmt und durch (3.1) für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und (3.2) für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gegeben.

Beweis (Idee): „$\Rightarrow$“: Sei $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ Skalarprodukt mit $\|x\| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$. Wir verifizieren:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y\,|\,x+y\rangle + \langle x-y\,|\,x-y\rangle \\
&= \langle x\,|\,x\rangle + \langle x\,|\,y\rangle + \langle y\,|\,x\rangle + \langle y\,|\,y\rangle + \langle x\,|\,x\rangle + \langle y\,|\,y\rangle - \langle x\,|\,y\rangle - \langle y\,|\,x\rangle \\
&= 2\,\langle x\,|\,x\rangle + 2\,\langle y\,|\,y\rangle \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Sei (3.3) erfüllt. Definiere $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ durch (3.1) bzw. (3.2). Dann haben wir

$$\langle x\,|\,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right) \quad \forall x, y \in E$$

Zu zeigen:

$$\langle x_1 + x_2\,|\,y\rangle = \langle x_1\,|\,y\rangle + \langle x_2\,|\,y\rangle \tag{3.4}$$

$$\langle \lambda x\,|\,y\rangle = \lambda\,\langle x\,|\,y\rangle \tag{3.5}$$

(3.4) folgt mit (3.3). //

Beispiel I. 3. 3. Sei $E = C([0,1])$, $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. $\|\cdot\|$ kommt von keinem Skalarprodukt, denn mit $f \equiv 1$, $g(t) = t$ folgt $\|f\| = \|g\| = 1$, $\|f+g\| = 2$, $\|f-g\| = 1$, also

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 5 \neq 4 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2\,.$$

✓

Definition I. 3. 7 *(orthogonal)*. Seien $x, y \in E$. x und y heißen *orthogonal* $:\iff \langle x\,|\,y\rangle = 0$, in Zeichen: $x \perp y$. Zwei Teilmengen $M, N \subseteq E$ heißen *orthogonal* $:\iff \langle x\,|\,y\rangle = 0\ \forall x \in M, y \in N$, in Zeichen: $M \perp N$. ♡

4. Sätze von RIESZ

20.10.05

a. Definitionen

Definition I. 4. 1 ***(orthogonale direkte Summe).*** Es seien $(E_1, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_1)$ und $(E_2, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2)$ Hilberträume. Die *orthogonale direkte Summe* ist die Menge $E = E_1 \dot{+} E_2$ (direkte Summe) der Hilberträume E_1, E_2 mit

$$E = \{\, (x_1, x_2) \;\mid\; x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \,\}\,.$$

Wir definieren das Skalarprodukt:

$$\langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2) \rangle := \langle x_1 \,|\, y_1 \rangle_1 + \langle x_2 \,|\, y_2 \rangle_2 \qquad \forall x_1, y_1 \in E_1,\; x_2, y_2 \in E_2.$$

Für die zugehörige Norm gilt

$$\|(x_1, x_2)\|^2 = \langle (x_1, x_2) \,|\, (x_1, x_2) \rangle = \|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_2^2 \qquad \heartsuit$$

Damit ist E auch vollständig und $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

Definition I. 4. 2 ***(isometrischer Isomorphismus).*** Ein *isometrischer Isomorphismus* eines Hilbertraums $(E_1, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_1)$ und eines Hilbertraums $(E_2, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2)$ ist eine bijektive lineare Abbildung

$$I\colon E_1 \to E_2$$

mit

$$\langle I(x) \,|\, I(y) \rangle_2 = \langle x \,|\, y \rangle_1 \qquad \forall x, y \in E_1 \qquad \heartsuit$$

Sei E wie oben orthogonale Summe von E_1 und E_2. Seien $\tilde{E}_1 = \{\, (x_1, 0) \;\mid\; x_1 \in E_1 \,\}$ und $\tilde{E}_2 = \{\, (0, x_2) \;\mid\; x_2 \in E_2 \,\}$. $\tilde{E}_1$ und $\tilde{E}_2$ sind lineare Teilräume von E. Sie sind beide in der Norm von E abgeschlossen, denn

$$\|(x_1, 0)\| = \|x_1\|_1 \qquad \text{und} \qquad \|(0, x_2)\| = \|x_2\|_2$$

Definition I. 4. 3 ***(Unterraum).*** Ein abgeschlossener linearer Teilraum eines Hilbertraums heißt *Unterraum*. Jeder Unterraum eines Hilbertraums ist selbst ein Hilbertraum (mit dem induzierten Skalarprodukt). ♡

Wir definieren $I_1(x, 0) = x$, $I_2(0, y) = y$. Man zeigt: I_1 ist ein isometrischer Isomorphismus von $\tilde{E}_1$ auf E_1. Es gilt $\tilde{E}_1 \perp \tilde{E}_2$, denn $\langle (x, 0) \,|\, (0, y) \rangle = \langle x \,|\, 0 \rangle_1 + \langle 0 \,|\, y \rangle_2$. Außerdem gilt $E = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$, denn $(x, y) = (x, 0) + (y, 0)$ und $\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 = \{(0, 0)\}$. Nun identifizieren wir E_i mit $\tilde{E}_i$ und erhalten $E_1 \perp E_2$, $E = E_1 + E_2$.

Definition I. 4. 4 ***(direkte orthogonale Summe).*** Der Hilbertraum E heißt dann *direkte orthogonale Summe* der Hilberträume E_1 und E_2, in Zeichen:

$$E = E_1 \oplus E_2. \qquad \heartsuit$$

Beispiele I. 4. 1. (i) $E_1 = \mathbb{C}^n$, $E_2 = \mathbb{C}^m$, dann ist $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{C}^{n+m}$.

(ii) $E_1 = L^2\,[a, b]$, $E_2 = L^2\,[b, c]$ mit Lebesgue-Maß, dann ist $E_1 \oplus E_2 = L^2\,[a, c]$. ✓

Dieses Konzept der endlichen orthogonalen Summe können wir auf eine abzählbar unendliche Summe ausdehnen, indem wir setzen

$$E = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_k \in E_k \; \forall k \in \mathbb{N},\; \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^2 < \infty \right\}$$

Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt: E ist ein Vektorraum mit Addition $(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$ und $\lambda(x_k) = (\lambda x_k)$. Wir setzen nun $\langle (x_k) \,|\, (y_k) \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k \,|\, y_k \rangle_k$. Diese Reihe konvergiert, denn

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x_k \,|\, y_k \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k \, \|y_k\|_k \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Man zeigt leicht: $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt und $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ ist ein Hilbertraum, und wir schreiben $E = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Definition I. 4. 5 *(orthogonaler Unterraum).* Es sei E_1 ein Unterraum des Hilbertraumes E. Dann ist

$$E_1^{\perp} := \{\, y \in E \;\;|\;\; x \perp y \;\forall x \in E_1 \,\}$$

der *orthogonale Unterraum* von E_1. ♡

b. Erster Satz von Riesz

Lemma I. 4. 6. M sei eine abgeschlossene, konvexe und nichtleere Teilmenge des Hilbertraums E. Es sei $x \in E$ und $\rho(x) := \inf_{y\in M} \|x - y\|$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $x_1 \in M$ mit $\rho(x) = \|x_1 - x\|$.

Beweis: Wir wählen eine Folge (y_n) mit $y_n \in M$ derart, daß $\|x - y_n\| \to \rho(x)$. Zu zeigen: $y_n \to x_1$.

Behauptung: (y_n) ist Cauchyfolge.

Beweis:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x + x - y_m\|^2 \\ &= 2\,\|y_n - x\|^2 + 2\,\|x - y_m\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2 - 4\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2\,\|x - y_n\|^2 + 2\,\|x - y_m\|^2 - 4\rho(x)^2 \quad \Big| \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \\ 0 &= 2\rho(x)^2 + 2\rho(x)^2 - 4\rho(x)^2 \end{aligned}$$

/

Da E Hilbertraum ist, konvergiert (y_n) in E, also $y_n \to x_1$. Da $y_n \in M$ und M abgeschlossen, folgt $x_1 \in M$. Nun gilt $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - \lim_{n\to\infty} y_n\| = \|x - x_1\| = \rho(x)$.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen, $x_1, x_1' \in M$ erfüllen die Forderung $\rho(x) = \|x - x_1\| = \|x - x_1'\|$, dann:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\|x_1 - x_1'\right\|^2 = \left\|x_1 - x + x - x_1'\right\|^2 \\
&= 2\left\|x_1 - x\right\|^2 + 2\left\|x - x_1'\right\|^2 - \left\|2x - x_1 - x_1'\right\|^2 - 4\left\|x - \frac{x_1 + x_1'}{2}\right\|^2 \\
&= 2\rho(x)^2 + 2\rho(x)^2 - 4\rho(x)^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \left\|x_1 - x_1'\right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_1'$$ //

Satz I. 4. 7 *(Erster Satz von Riesz)*. Sei E_1 ein Unterraum von E. Weiter sei

$$E_1^\perp = \{\, x \in E \mid x \perp y \ \forall y \in E_1 \,\}.$$

Dann folgt:

$$E_1 \oplus E_1^\perp = E$$

Beweis: Sei $x \in E$. Setze $M = E_1$. Sei $x_1 \in E_1$ mit $\rho(x) = \|x - x_1\|$ nach Lemma I. 4. 6. Dann $\|x - x_1\| = \rho(x) \leq \|x - x_1 + ty\|$ für $y \in E_1, t \in \mathbb{R}$. Nach Übungsaufgabe folgt: $x - x_1 \perp y \ \forall y \in E_1$, also $x - x_1 \in E_1^\perp$. Sei $x_2 = x - x_1$. Dann $x = x_1 + x_2 \in E_1 + E_1^\perp$. Es gilt $E_1 \perp E_1^\perp$ nach Definition. Also $E = E_1 \oplus E_1^\perp$.

Eindeutigkeit: Sei $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ mit $x_1, x_1' \in E_1$ und $x_2, x_2' \in E_1^\perp$. Dann:

$$\underbrace{x_1 - x_1'}_{\in E_1} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in E_1^\perp} \quad \Rightarrow \quad \left\langle x_1 - x_1' \,\middle|\, x_2' - x_2 \right\rangle = 0$$

Nach den Axiomen des Skalarprodukts folgt $x_1 - x_1' = 0$, damit $x_1 = x_1'$ und damit $x_2 = x_2'$. //

Definition I. 4. 8 *(Projektion)*. Sei $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in E_1$ und $x_2 \in E_1^\perp =: E_2$. $P_1 x = x_1$, $P_2 x = x_2$. Die P_i heißen *Projektion* von x auf E_i. ♡

Bemerkung I. 4. 2. $\|x\|^2 = \langle x_1 + x_2 \,|\, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1 \,|\, x_1 \rangle + \langle x_2 \,|\, x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

c. Zweiter Satz von Riesz

Definition I. 4. 9 *(lineares Funktional).* Sei E ein Vektorraum. Ein *lineares Funktional* auf E ist eine Abbildung $F\colon E \to \mathbb{K}$ mit $F(\lambda x + y) = \lambda F(x) + F(y)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E$. ♡

Definition I. 4. 10 *(stetig).* Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum. Ein lineares Funktional F auf E heißt *stetig*, wenn aus $x_n \to x$ in $(E, \|\cdot\|)$ stets $F(x_n) \to F(x)$ folgt. ♡

E' sei die Menge aller stetigen linearen Funktionale auf E. Für $F_1, F_2 \in E', \lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$(F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x), \quad (\lambda F_1)(x) := \lambda F_1(x) \quad \forall x \in E.$$

Man zeigt leicht: $F_1 + F_2 \in E'$ und $\lambda F_1 \in E'$. Also ist E' auch ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Sei nun $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Sei $y \in E$. Wir definieren $F_y(x) := \langle x\,|\,y\rangle\ \forall x \in E$. F_y ist ein lineares Funktional. Aus $x_n \to x$ folgt $\langle x_n\,|\,y\rangle \to \langle x\,|\,y\rangle$, also ist F_y stetig, also $F_y \in E'$. Nun fragen wir uns: Sind alle stetigen linearen Funktionale auf E von dieser Gestalt? Ja, nach dem

Satz I. 4. 11 *(Zweiter Satz von Riesz).* Zu jedem stetigen linearen Funktional F auf dem Hilbertraum $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in E$ mit $F \equiv F_y$, d. h.

$$F(x) = F_y(x) = \langle x\,|\,y\rangle \quad \forall x \in E.$$

Beweis: Sei $E_1 = \mathcal{N}(F) = \{\, x \in E \mid F(x) = 0 \,\}$. Da F linear ist, ist $\mathcal{N}(F)$ ein linearer Teilraum. Da F stetig ist, ist $\mathcal{N}(F)$ abgeschlossen (denn sei $x_n \to x$, $x_n \in \mathcal{N}(F)$, dann $F(x_n) = 0 \to F(x) = 0$, also $x \in \mathcal{N}(F)$). Also ist E_1 ein Unterraum von E. Nach Satz I. 4. 7 gilt: $E = E_1 \oplus E_1^\perp$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

(i) $E_1^\perp = \{0\} \Rightarrow E = E_1 = \mathcal{N}(F) \Rightarrow F(x) = 0\ \forall x \in E \Rightarrow F(x) = \langle x\,|\,0\rangle$.

(ii) $E_1^\perp \neq \{0\}$. Sei $u \in E_1^\perp$, $u \neq 0$. Dann gilt $F(u) \neq 0$, denn sonst wäre $u \in E_1$. Dann:

$$\begin{aligned} F\left(x - \frac{F(x)}{F(u)}u\right) &= F(x) - \frac{F(x)}{F(u)}F(u) = 0 \\ \Rightarrow \quad x - \frac{F(x)}{F(u)}u &\in \mathcal{N}(F) \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$$\Big\langle \underbrace{x - \frac{F(x)}{F(u)}u}_{\in E_1} \,\Big|\, \underbrace{u}_{\in E_1^\perp} \Big\rangle = 0 = \langle x\,|\,u\rangle - \frac{F(x)}{F(u)}\langle u\,|\,u\rangle$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{\langle x\,|\,u\rangle}{\langle u\,|\,u\rangle}F(u)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\overline{F(u)}}{\langle u\,|\,u\rangle}u$$

also $F = F_y$ mit diesem y. //

Bemerkung I. 4. 3.

$$y \mapsto F_y, \quad \lambda y \mapsto F_{\overline{\lambda} y}, \quad F_{y+z} = F_y + F_z$$

Sei E^+ der Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit folgenden Operationen auf der Menge E:

$$\underbrace{x+y}_{\text{in } E^+} = \underbrace{x+y}_{\text{in } E}, \qquad \underbrace{\lambda x}_{\text{in } E^+} = \underbrace{\overline{\lambda} x}_{\text{in } E}$$

Dann ist die Abbildung $E^+ \ni y \mapsto f_y \in E'$ eine Bijektion von E^+ auf E'.

Anwendungen: Sei $E = L^2(X,\mu)$: $E' = \left\{ F_g(f) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu, \ \forall f,g \in E \right\}$, Spezialfall: $E = \ell^2(\mathbb{N})$: $E' = \left\{ F_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}, \quad \forall x,y \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}$. In $E \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$:

$$F(x) = F_y(x) = \sum_{k=1}^n x_n \overline{y_n}$$

5. Orthonormalsysteme und Fourierentwicklung im Hilbertraum

Motivation: Sei $E = \mathbb{R}^n$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis, z. B. $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \ldots, 0)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E \\ \|x\|^2 &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ \langle x \,|\, y \rangle &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

Wir suchen nun nach analogen Resultaten für Hilberträume.

a. Orthonormalsysteme

Definition I. 5. 1 *(Orthogonal-, Orthonormalsystem).* Ein System $\{x_i,\ i \in I\}$ von Vektoren $x_i \in E$ heißt *Orthogonalsystem* $:\iff \left\langle x_i \,|\, x_j \right\rangle = 0\ \forall i,j \in I,\ i \neq j$ und *Orthonormalsystem (NOS)*, wenn es ein Orthogonalsystem ist und $\langle x_i \,|\, x_i \rangle = 1\ \forall i \in I$ gilt. ♡

Für NOS gilt auch: $\|x_i\| = 1\ \forall i \in I$

Beispiele I. 5. 1. (i) $E = \ell^2(\mathbb{N})$, $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \ldots)\ \forall i \in \mathbb{N}$. $\{e_i\}$ ist ein NOS.

(ii) $E = L^2[-\pi,\pi]$, $\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$. Dann ist $\{1, \sin nx, \cos nx\ n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthogonalsystem, denn z. B.

$$\begin{aligned} \langle \sin nx \,|\, \cos mx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{n+m}{2} x + \cos \frac{n-m}{2} x\, dx \\ &= 0 \quad \forall n \neq m \end{aligned}$$

Das können wir zu einem NOS normieren: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\ n \in \mathbb{N} \right\}$. ✓

Lemma I. 5. 2 *(Satz des Pythagoras)*. Es sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Orthogonalsystem. Dann gilt

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 &= \langle x_1 + \cdots + x_n \,|\, x_1 + \cdots + x_n\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle x_i \,|\, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \,|\, x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\end{aligned}$$

//

Satz I. 5. 3. Es sei $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthogonalsystem. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ im Hilbertraum $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ konvergiert.

Beweis: Seien $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$. Dann folgt nach Pythagoras:

$$\begin{aligned}\|S_{n+m} - S_n\|^2 &= \|x_{n+m} + \cdots + x_{n+1}\|^2 = \|x_{n+m}\|^2 + \cdots + \|x_{n+1}\|^2 \\ &= \tilde{S}_{n+m} - \tilde{S}_n\end{aligned}$$

Da $\tilde{S}_{n+m} \geq \tilde{S}_n$, ist (S_n) eine Cauchyfolge im Hilbertraum $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ genau dann, wenn $(\tilde{S}_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Da E und $\mathbb{R}$ vollständig sind, folgt die Behauptung. //

b. Fourierentwicklung von Elementen im Hilbertraum

Es sei $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ ein NOS im Hilbertraum $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$.

Definition I. 5. 4 *(Fourierkoeffizient)*. Für $x \in E$ heißt $\langle x \,|\, e_n\rangle$ der *Fourierkoeffizient* von x bezüglich e_n. ♡

Beispiel I. 5. 2. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\ n \in \mathbb{N} \right\}$ im Hilbertraum $L^2[-\pi, \pi]$. Sei $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}\left\langle f \,\Big|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ \left\langle f \,\Big|\, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \\ \left\langle f \,\Big|\, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\end{aligned}$$

sind die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten. ✓

Satz I. 5. 5 *(Besselsche Ungleichung)*. Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein NOS und es sei $\langle x \,|\, x_n\rangle$ der n-te Fourierkoeffizient bzgl. dem NOS.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x \,|\, x_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \forall x \in E$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $y_n = x - \sum_{k=1}^n \langle x \,|\, x_k \rangle \, x_k$. Dann ist für $m = 1, \dots, n$:

$$\langle y_n \,|\, x_m \rangle = \langle x \,|\, x_m \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x \,|\, x_k \rangle \langle x_k \,|\, x_m \rangle = 0$$

Also ist $\{y_n, \langle x \,|\, x_1 \rangle \, x_1, \dots, \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n\}$ ein Orthogonalsystem. Nach Lemma I. 5. 2 gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| y_n + \sum_{k=1}^n \langle x \,|\, x_k \rangle \, x_k \right\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\langle x \,|\, x_k \rangle \, x_k\|^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^n |\langle x \,|\, x_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen ist beschränkt, also konvergiert die Reihe. //

Korollar I. 5. 6. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n$ konvergiert im Hilbertraum $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ für alle $x \in E$.

Beweis: Nach Satz I. 5. 5 konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \|\langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n\|^2 \equiv \sum_{n=1}^\infty |\langle x \,|\, x_n \rangle|^2$. Da $\{\langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n, n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthogonalsystem ist, folgt mit Satz I. 5. 3 die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n$. //

Definition I. 5. 7 *(Fourierreihe)*. Sei $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ ein NOS im Hilbertraum E. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n$ heißt *Fourierreihe* des Elementes $x \in E$. ♡

Definition I. 5. 8 *(vollständig)*. Ein NOS heißt *vollständig* oder *VNOS* oder *Orthonormalbasis*, wenn

$$\forall x \in E: \quad x = \sum_{n=1}^\infty \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n.$$

♡

Satz I. 5. 9. Für ein NOS $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ im Hilbertraum E sind äquivalent:

(i) $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n \ \forall x \in E$, d. h. die Fourierreihe von x konvergiert gegen x.

(ii) Aus $\langle z \,|\, x_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ für $z \in E$ folgt $z = 0$ ($\{x_n\}$ ist ein maximales NOS).

(iii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x \,|\, x_n \rangle|^2 \ \ \forall x \in E$, d. h. in Bessel'scher Ungleichung (Satz I. 5. 5) gilt Gleichheit für alle x)

(iv) $\langle x \,|\, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x \,|\, x_n \rangle \langle x_n \,|\, y \rangle \ \ \forall x, y \in E$ (Parselval'sche Vollständigkeitsrelation)

Beweis: **(i)⇒(iv):** $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n$, $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle y \,|\, x_n \rangle \, x_n$. Also

$$\begin{aligned} \langle x \,|\, y \rangle &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x \,|\, x_n \rangle \, x_n \,\middle|\, \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle y \,|\, x_k \rangle \, x_k \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x \,|\, x_n \rangle \overline{\langle y \,|\, x_k \rangle} \underbrace{\langle x_n \,|\, x_k \rangle}_{=\delta_{n,k}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x \,|\, x_n \rangle \overline{\langle y \,|\, x_n \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x \,|\, x_n \rangle \langle x_n \,|\, y \rangle \end{aligned}$$

(iv)⇒(iii): Setze $x = y$.

(iii)⇒(ii): Sei $\langle z \mid x_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nach (iii) mit z:

$$\|z\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle z \mid x_n \rangle|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

(ii)⇒(i): Sei $x \in E_1$, $y := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x \mid x_n \rangle \, x_n$. Zu zeigen: $x = y$.

$$\begin{aligned}\Big\langle \underbrace{x - y}_{=:z} \mid x_k \Big\rangle &= \langle x \mid x_k \rangle - \Big\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x \mid x_n \rangle \, x_n \mid x_k \Big\rangle \\ &= \langle x \mid x_k \rangle - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x \mid x_n \rangle \langle x_n \mid x_k \rangle = \langle x \mid x_k \rangle - \langle x \mid x_k \rangle\end{aligned}$$

Nach (ii) ist $z = x - y = 0$, also $x = y$. //

Beispiele I. 5. 3. (i) Es sei $E = \ell^2(\mathbb{N})$, $x_n = (0, \dots, 0, \underset{n\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\langle z \mid x_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $z = (z_n) \in E$. Dann:

$$0 = \langle z \mid x_n \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k \overline{x_{n,k}} = z_n \ \forall n,$$

also $z = 0$, damit ist $\{x_n\}$ vollständig.

(ii) $\{x_2, x_3, \dots\}$ ist nicht vollständig, da $x_1 \perp x_k \ \forall k > 1$. ✓

c. Existenz von Orthonormalbasen in separablen Hilberträumen

Definition I. 5. 10 *(separabel)*. Ein metrischer Raum heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq E$ gibt, die in E dicht liegt (d. h. $\overline{M} = E$). ♡

Beispiele I. 5. 4. (i) $E = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, also ist $\mathbb{R}$ separabel.

(ii) $E = \mathbb{R}^n$ und $E = \mathbb{C}^n$ sind separabel.

(iii) $E = \ell^2(\mathbb{N})$, $M = \Big\{ (r_1 + is_1, r_2 + is_2, \dots) \ \Big| \ r_k, s_k \in \mathbb{Q}, \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |r_k + is_k|^2 < \infty \Big\}$ ist abzählbare Teilmenge von E. Wir zeigen: M ist dicht in E.

Seien $x = (x_n) \in E$ und $\varepsilon > 0$ gewählt. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ Zahlen $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ mit $|x_n - (r_n + is_n)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Dann

$$\|x - (r_n + is_n)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - (r_n + is_n)|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^2 < \varepsilon^2$$

(iv) Sei $E = L^2[a, b]$, $a < b$ mit Lebesgue-Maß, sei

$$M := \left\{ \sum_{n=0}^{k} (r_n + is_n) x^n \ \middle| \ r_n, s_n \in \mathbb{Q}, \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

M ist abzählbare Teilmenge von E. Nach dem Satz von Weierstrass gilt: $\overline{M} = \overline{\mathbb{C}[x]} = \overline{C[a, b]} = L^2[a, b]$. Also ist $L^2[a, b]$ separabel.

(v) Auch $E = L^2(G)$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet und mit dem Lebesgue-Maß ist separabel. Für beschränkte G zeigt man das über den Satz von Weierstraß in n Variablen, für unbeschränkte G durch abzählbares approximieren.

(vi) Jedoch: $L^2(X, \mu)$ ist i. a. nicht separabel. $X = \mathbb{R}$, μ sei das Zählmaß. ✓

Satz I. 5. 11 *(Existenzkriterium)*. Es sei $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. E ist separabel $\iff$ E hat ein VNOS $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Sei $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ ein VNOS. $M = \left\{ \sum_{k=1}^n (r_k + is_k)x_k \;\middle|\; r_k, s_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist abzählbare und dichte Teilmenge von E.

„$\Rightarrow$“: Wir wenden das Gram-Schmidt’sche Orthonormalisierungsverfahren[1] an: Es sei $\{0\} \neq M = \{z_k, k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von E. Es sei $r_1 \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $z_{r_1} \neq 0$. Weiter sei $y_1 = \frac{z_{r_1}}{\|z_{r_1}\|}$, damit $\|y_1\| = 1$ und $\operatorname{Lin}\{y_1\} = \operatorname{Lin}\{z_1, \dots, z_{r_1}\}$. Es seien $y_1, \dots, y_k$ so konstruiert, daß $\{y_1, \dots, y_k\}$ ein NOS ist und $\operatorname{Lin}\{y_1, \dots, y_k\} = \operatorname{Lin}\{z_1, \dots, z_{r_k}\}$. Wenn $\operatorname{Lin}\{y_1, \dots, y_k\} = \operatorname{Lin} M$, so sind wir fertig.

Wenn nicht, dann gibt es ein z_l mit $\{z_1, \dots, z_{r_k}, z_l\}$ linear unabhängig. Sei l der kleinste Index mit dieser Eigenschaft. Ansatz: $y_{k+1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i + \alpha z_l$ mit $\lambda_i, \alpha \in \mathbb{K}$. Bestimme λ_i, α so, daß $y_{k+1} \perp y_1, \dots, y_k$ und $\|y_{k+1}\| = 1$. Dann ist $\{y_1, \dots, y_{k+1}\}$ ein NOS, $\lambda_1 = -\alpha \langle z_l \mid y_i \rangle$ sichert Orthogonalität, dann wird normiert.

Das Verfahren bricht nicht ab, da E nicht endlichdimensional ist. Also haben wir ein NOS $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit $\operatorname{Lin}\{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{Lin}\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen: $\{y_n\}$ ist ein VNOS. Sei $z \in E$ mit $\langle z \mid y_n \rangle = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\langle z \mid y \rangle = 0 \; \forall y \in \operatorname{Lin}\{y_n\} = \operatorname{Lin}\{z_n\}$. Also $\langle z \mid z_n \rangle = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und damit $\langle z \mid x \rangle = 0 \; \forall x \in \overline{M} = E$. Setze $x = z$, dann $\langle z \mid z \rangle = 0$, also $z = 0$. //

Bemerkung I. 5. 5. (i) Es seien die $z_k, k \in \mathbb{N}$ paarweise linear unabhängig, dann gilt $r_k = k$, also $\{y_1, \dots, y_n\} = \left\{ \frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_n}{\|z_n\|} \right\}$.

(ii) Orthogonale Polynome: Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, μ Borelmaß auf X, $X \in \{[a, b], [0, \infty[, \mathbb{R}\}$. μ habe keinen endlichen Träger, d. h. μ ist nicht Summe von endlich vielen Punktmaßen. $E = L^2(X, \mu)$. Sei $z_k = t^k, k \in \mathbb{N}_0$. Dann sind die z_k in E linear unabhängig. Also existiert ein NOS $\{y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $\operatorname{Lin}\{y_0, \dots, y_n\} = \operatorname{Lin}\{z_0, \dots, z_n\} = \{p \in \mathbb{C}[t] : \deg p \leq n\}$. Da z_n linear unabhängig folgt $\deg y_n = n$.

Korollar I. 5. 12. Sei E ein separabler Hilbertraum. Wenn E endlichdimensional ist als Vektorraum, dann ist E isomorph zu $\mathbb{C}^n$. Wenn E ein unendlichdimensionaler *Vektorraum* ist, dann ist E isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$.

Beweis: Sei E unendlichdimensional: E ist separabel und unendlichdimensional, also gibt es nach Satz I. 5. 11 ein VNOS $\{y_n\}$ von E. Da $\{y_n\}$ ein VNOS ist, gilt $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x \mid y_n \rangle y_n \; \forall x \in E$. Wir definieren $F(x) = (\langle x \mid y_n \rangle, \; n \in \mathbb{N})$ für $x \in E$. Nach der Bessel’schen Ungleichung (Satz I. 5. 5) gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x \mid y_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, also ist $F(x) \in \ell^2(\mathbb{N})$. F ist linear.

[1] Der Text soll im folgenden geändert werden: Trennung der Beschreibung GS vom Rest des Beweises

Wir zeigen nun: F ist surjektiv. Sei $a = (a_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Da $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y_n$ im Hilbertraum nach Korollar I. 5. 6. Sei $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k y_k$. Es ist $\langle x \,|\, y_m \rangle = \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y_n \,|\, y_m \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \langle y_n \,|\, y_m \rangle = a_m$. Also:

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x \,|\, y_m \rangle \, y_n, \quad F(x) = (\langle x \,|\, y_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n) = a$$

Seien $x, y \in E$. Dann gilt

$$\langle F(x) \,|\, F(y) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \langle (\langle x \,|\, y_n \rangle) \,|\, (\langle y \,|\, y_n \rangle) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x \,|\, y_n \rangle \overline{\langle y \,|\, y_n \rangle} = \langle x \,|\, y \rangle_E \tag{5.1}$$

nach Parseval'scher Vollständigkeitsrelation. Also erhält F das Skalarprodukt. Wir zeigen nun noch, daß F injektiv ist: Sei $F(x) = 0$. Nach (5.1) gilt: $\langle F(x) \,|\, F(x) \rangle = \langle x \,|\, x \rangle = 0$, also $x = 0$. Daher ist F ein Isomorphismus von E auf $\ell^2(\mathbb{N})$. //

Bemerkung I. 5. 6. Jeder der folgenden Hilberträume ist also isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$: $L^2\,[a, b]$, $L^2(G)$ mit G Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und λ-Lebesguemaß.

d. Anwendung auf klassische Fourierreihen

Definition I. 5. 13 *(trigonometrisches Polynom)*. Ein *trigonometrisches Polynom* ist eine Funktion der Form

$$p(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \sin nx + b_n \cos nx \quad k \in \mathbb{N}$$

♡

Satz I. 5. 14. Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf $[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $p_\varepsilon(x)$ mit $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [-\pi, \pi]$.

Korollar I. 5. 15. Das tringonometrische NOS $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ ist vollständig in $L^2\,[-\pi, \pi]$.

Beweis: Sei $\langle z \,|\, y_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\{y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ trigonometrisches System. Daher ist z orthogonal zu allen trigonometrischen Polynomen, nach Satz I. 5. 14 auch zu den stetigen Funktionen mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Also $z \perp L^2\,[-\pi, \pi]$, also $= 0$. D. h., für alle $f \in L^2\,[-\pi, \pi]$ gilt:

$$f = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

//

e. Andere Aussagen über Konvergenz von klassischen Fourierreihen

(i) Kolmogorov (1911): Es gibt Funktionen $f \in L^1\,[-\pi, \pi]$ derart, daß die Fourierreihe fast überall konvergiert auf $[-\pi, \pi]$.

(ii) Carleson (1962): $\forall f \in L^2\,[-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe fast überall gegen $f(x)$.

(iii) Kahane (1970): Zu jeder Lebesgue-Nullmenge $N \subseteq [-\pi, \pi]$ existiert eine Funktion $f \in L^2\,[-\pi, \pi]$ derart, daß die Fourierreihe von f für $f(x)$ $\forall x \in N$ nicht konvergiert.

(iv) $f(x)$ sei stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$ und $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$. Dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen $f(x)$. Die Fourierreihe konvergiert auch absolut. Beweisidee: f stetig differenzierbar, also $a_n \sim \frac{c_n}{n}$ mit $(c_n) \in \ell^2$.

(v) Sei $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $t_0 \in]-\pi, \pi[$. Es gelte $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+t_0)-f(t_0)}{x} \right| dx < \infty$, wobei f periodisch mit Periode 2π fortgesetzt wird. Dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ im Punkt t_0 gegen $f(t_0)$.

(vi) *Lokalisationsprinzip:* Es seien $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$, $t_0 \in]-\pi, \pi[$ und $\varepsilon > 0$. Es gelte $f(t) = g(t)\ \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\cap [-\pi, \pi]$. Dann gilt: Die Folge der Partialsummen der Fourierreihe von f konvergiert in t_0 genau dann, wenn die Folge der Partialsummen der Fourierreihe von g in t_0 konvergiert.

(vii) Sei $f(x) \in C^0[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$.

$$S_n(f) := a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

sei n-te Partialsumme der Fourierreihe von $f(x)$. Sei $\sigma_n(f) := \frac{S_0(f)+\cdots+S_n(f)}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (σ_n) konvergiert dann gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen $f(x)$ (Satz von Fejer).

Kapitel II.

Grundprinzipien der Funktionalanalysis

1. Das Baire'sche Kategorietheorem

Im folgenden sei (E, d) ein metrischer Raum.

Definition II. 1. 1 *(nirgendsdicht).* Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt *nirgendsdicht*, wenn sie in keiner Umgebung eines Punktes dicht liegt, d. h. $\forall x_0 \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; K_\varepsilon(x_0) \nsubseteq \overline{M}$, wobei

$$K_\varepsilon(x_0) := \{ x \in E \mid d(x, x_0) < \varepsilon \} . \qquad \heartsuit$$

Definition II. 1. 2 *(1. Kategorie, 2. Kategorie).* Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt von *1. Kategorie,* wenn M abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Teilmengen in (E, d) ist. M heißt von *2. Kategorie,* wenn M nicht von 1. Kategorie ist. ♡

Anschaulich heißt 1. Kategorie soviel wie „klein“ oder „mager“, wobei das schon viel sein kann.

Beispiel II. 1. 1. (i) $E = \mathbb{R}$. Einpunktige Mengen sind nirgendsdicht. $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^\infty \{r_n\}$ ist von 1. Kategorie. $\mathbb{Q}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}$.

(ii) $M = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ ist nirgendsdicht in $\mathbb{R}$, denn $\overline{M} = \{0\} \cup M$ enthält kein Intervall. ✓

Satz II. 1. 3 *(Baire'sches Kategorietheorem).* Jeder nichtleere vollständige metrische Raum E ist von 2. Kategorie.

Beweis: Angenommen, $E = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, A_i nirgendsdicht (also E von 1. Kategorie). Dann konstruieren wir Cauchyfolge:

(i) A_1 ist nirgendsdicht $\Rightarrow \exists x_1 \in E$ mit $x_1 \notin \overline{A_1}$, d. h. $\exists \varepsilon_1 \in]0, 1[$ mit $K_{\varepsilon_1}(x_1) \cap A_1 = \emptyset$.

(ii) A_2 ist nirgendsdicht $\Rightarrow \overline{A_2} \nsupseteq K_\varepsilon(x_1) \; \forall \varepsilon > 0. \Rightarrow \exists x_2 \in K_{\varepsilon_1}(x_1)$ mit $x_2 \notin \overline{A_2} \Rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ mit $K_{\varepsilon_2}(x_2) \cap A_2 = \emptyset,\; K_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq K_{\varepsilon_1}(x_1)$.

Fortsetzung liefert: $\varepsilon_n \in \left]0, \frac{1}{2^{n-1}}\right[$, $K_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq K_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$ und $K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset$.

Behauptung: (x_n) ist eine Cauchyfolge von E.

Beweis: $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) \leq \varepsilon_N + \varepsilon_N \leq \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}}$ für $N \in \mathbb{N},\; n, m \geq N$ /

Da E vollständig ist, gibt es $x \in E$ mit $x_n \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} x$. Da $E = \bigcup A_n$ $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_k$. Für $n \geq N$ ist $x_n \in K_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq K_{\varepsilon_N}(x_N)$. Für $n \to \infty$: $x_n \to x$, also $x \in K_{\varepsilon_N}(x_N) \subseteq K_{\varepsilon_{N-1}}(x_{N-1})$. Mit $K_{\varepsilon_{N-1}}(x_{N-1}) \cap A_{N-1} = \varnothing$ $\forall N \in \mathbb{N}$, $x \in K_{\varepsilon_{N-1}}(x_{N-1}) \cap A_k$, $k = N-1$ im Widerspruch. //

Anwendungen II. 1. 2. (i) $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$. E ist von 2. Kategorie. Insbesondere: E ist keine abzählbare Vereinigung einpunktiger Mengen, also ist $\mathbb{R}$ nicht abzählbar.

(ii) Es gibt $f \in C^0\,[0,1]$ mit $f(x)$ nicht differenzierbar für alle x.

Wir geben ein explizites Beispiel (von WEIERSTRASS):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n} \text{ mit } \{y\} := \min(\lfloor x\rfloor + x, \lceil x\rceil - x)$$

Beweis: mit BAIRE'schem Kategorietheorem.

$$E = C\,[0,1]\,, \quad d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \equiv \|f-g\|$$

(E,d) ist vollständig. Sei

$$M_n := \left\{ f \in E \;\middle|\; \exists t_0 \in [0,1] \text{ mit } \sup_{0<h<1} \left| \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} \right| \leq n \right\}$$

(wir können f fortsetzen außerhalb von $[0,1]$).

Behauptung: M_n ist abgeschlossen in E.

Beweis: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M_n mit $f_k \to f$ in E. Zu zeigen: $f \in M_n$. Da $f_k \in M_n$ $\exists t_k \in [0,1]$ mit $\sup_{0<h<1} \left|\frac{f(t_k+h)-f(t_k)}{h}\right| \leq n$. Nach Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS besitzt $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. O. B. d. A. sei (t_k) selbst konvergent. Sei $t_0 = \lim_{k\to\infty} t_k$. Sei $h \in\,]0,1[$ fest gewählt.

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(t_k+h) - f(t_k)}{h}\right| &\leq \underbrace{\left|\frac{f(t_k+h) - f_k(t_k+h)}{h}\right|}_{<\varepsilon \text{ da } f_k\to f} + \underbrace{\left|\frac{f_k(t_k+h) - f_k(t_k)}{h}\right|}_{\leq n \text{ da } f_k\in M_n} + \underbrace{\left|\frac{f_k(t_k) - f(t_k)}{h}\right|}_{<\varepsilon} \\ &< 2\varepsilon + n\end{aligned}$$

für k hinreichend groß. Für $k \to \infty$:

$$\left|\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}\right| \leq 2\varepsilon + n$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig: $|\cdot| \leq n \;\Rightarrow\; f \in M_n$ /

Behauptung: M_n nirgendsdicht in E.

Beweis: Angenommen, daß nicht, dann $\overline{M_n} \supseteq K_\varepsilon(g)$ für ein $g \in E$ und $\varepsilon > 0$.

$$K_\varepsilon(g) = \{\, h \in E \;\mid\; |h(t) - g(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,1] \,\}$$

Wähle $h \in K_\varepsilon(g)$ derart, daß alle Anstiege $> n$ sind.

$$M_n = \left\{ f \in E \;\middle|\; \sup_{0<h<1} \left|\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}\right| \leq n \right\}$$

also $h \notin M_n$ im Widerspruch zur Annahme. /

Nach Satz II. 1. 3 gilt: $E \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, da M_n nirgendsdicht. Sei $f \in E$ mit $f \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. D. h., wäre f differenzierbar in t_0, dann $\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right| \leq n$ für ein $n, |h| < 1$. Also wäre $f \in M_n$ im Widerspruch zur Wahl von f. Also ist f nirgends differenzierbar. //

(iii) Carominas, Balagner, Agnion:
Es sei $f(x) \in C^{\infty}\ ]a,b[\ ,\ a,b \in \mathbb{R}$. Zu jedem $x \in\ ]a,b[\ \exists n_x \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n_x)}(x) = 0$. Dann ist $f(x)$ ein Polynom.

Definition II. 1. 4 *(lokalkompakt)*. Ein Raum E heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt $x_0 \in E$ eine kompakte Umgebung hat. ♡

Dazu ist äquivalent: Zu $x_0 \in E$ existiert $U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in E \mid d(x,x_0) \leq \varepsilon \}$, sodaß U_ε kompakt ist.

Satz II. 1. 5. Jeder nichtleere lokalkompakte metrische Raum ist von 2. Kategorie.

Beweis: Analog zu Satz II. 1. 3: Ersetze Vollständigkeit durch Kompaktheit der Umgebung. //

Beispiele II. 1. 3. (i) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\mathbb{K}^n$ mit euklidischer Norm ist lokalkompakt, denn $U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in E \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon \}$ ist abgeschlossene und beschränkte Teilmenge vom $\mathbb{K}^n$, also kompakt.

(ii) E sei unendlich-dimensionaler Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Dann ist E nicht lokalkompakt.

(iii) $\mathbb{Q}$ mit Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist nicht lokalkompakt, denn

$$U_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{Q} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon \} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap \mathbb{Q}$$

ist nicht kompakt.

(iv) M sei eine beliebige Menge mit diskreter Metrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \neq y \\ 0 & \text{wenn } x = y \end{cases}$$

M ist lokalkompakt, denn $U_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ ist trivialerweise kompakt.

(v) Ein Teilraum eines lokalkompakten Raumes ist im allgemeinen nicht lokalkompakt, siehe $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Allerdings ist jede offene Teilmenge eines lokalkompakten Raumes lokalkompakt, sowie jede abgeschlossene Teilmenge. ✓

Zusammenfassung: Sei E ein nichtleerer, vollständiger oder lokalkompakter metrischer Raum. Dann ist E von 2. Kategorie, d. h. wenn E eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen ist, dann $\exists k \in \mathbb{N},\ x_0 \in E,\ \varepsilon > 0 :\ \overline{M_k} \supseteq K_\varepsilon(x_0)$.

2. Stetige lineare Abbildungen von normierten Räumen

a. Stetige und beschränkte Abbildungen

Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$ und $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normierte lineare Räume.

Definition II. 2. 1 *(Lineare Abbildung)*. Eine Abbildung $T\colon E_1 \to E_2$ heißt *linear*, wenn

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in E_1,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Wir nennen lineare Abbildungen auch *lineare Operatoren*. ♡

Definition II. 2. 2 *(Stetige lineare Abbildung)*. Eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \to E_2$ heißt *stetig in* x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus E_1 mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ in $(E_1, \|\cdot\|_1)$ stets gilt

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) \qquad \text{in} \quad (E_2, \|\cdot\|_2).$$

T heißt *stetig*, wenn T in jedem $x_0 \in E_1$ stetig ist. ♡

Definition II. 2. 3 *(Beschränkte Menge)*. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ eines metrischen Raumes (E, d) heißt *beschränkt*, wenn es ein $x_0 \in E$ gibt mit $\sup_{x\in M} d(x, x_0) < \infty$. Wenn $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum ist, dann ist M beschränkt, wenn $\sup_{x\in M} \|x\| < \infty$. ♡

Definition II. 2. 4 *(Beschränkte lineare Abbildung)*. Eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \to E_2$ heißt *beschränkt*, wenn T jede beschränkte Teilmenge von $(E_1, \|\cdot\|_1)$ in eine beschränkte Teilmenge von $(E_2, \|\cdot\|_2)$ abbildet. ♡

Lemma II. 2. 5. Für eine lineare Abbildung $T\colon E_1 \to E_2$ sind äquivalent:

(i) T ist beschränkt

(ii) $T(U)$ ist beschränkt, mit $U := U_1(0) = \{\, x \in E_1 \mid \|x\|_1 \le 1 \,\}$

(iii) $T(S)$ ist beschränkt, mit $S := S_1(0) = \{\, x \in E_1 \mid \|x\|_1 = 1 \,\}$

b. Operatornorm

Definition II. 2. 6 *(Operatornorm)*. Sei $T\colon E_1 \to E_2$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann heißt

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|T(x)\|_2$$

die *Operatornorm* von T. ♡

Lemma II. 2. 7. Es gilt

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{\, \lambda > 0 \mid \|T(x)\|_2 \le \lambda \|x\|_1 \quad \forall x \in E_1 \,\} \\ &= \sup_{\|x\|_1 = 1} \|T(x)\|_2 \end{aligned}$$

Beweis: Siehe Übung. //

Satz II. 2. 8. Für jede lineare Abbildung $T\colon E_1 \to E_2$ sind äquivalent:

(i) T ist stetig in einem $x_0 \in E_1$

(ii) T ist stetig

(iii) T ist beschränkt

(iv) $\exists \lambda > 0\ \forall x \in E_1: \quad \|T(x)\|_2 \le \lambda \|x\|_1$

Beweis: **(i)⇒(iv)** Sei o. B. d. A. $x_0 = 0$ (möglich, da T linear). Da T stetig ist in $x_0 = 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $T(U_\delta(0)) \subseteq U_1(0)$. Sei $x \in E_1$, $x \neq 0$. Setze $y := \delta \frac{x}{\|x\|_1}$. Dann ist $\|y\|_1 = \delta$, also ist $y \in U_\delta(0)$, also $T(y) \in U_1(0)$, d. h.

$$\|T(y)\|_2 \le 1 \cdot \left\| T\Bigg(\underbrace{\delta \frac{x}{\|x\|_1}}_{=y} \Bigg) \right\| \le 1$$

$$\Rightarrow \qquad \|T(x)\|_2 \le \underbrace{\delta^{-1}}_{=:\lambda} \|x\|_1$$

(iv) ⟺ (iii) Lemma II. 2. 7

(ii)⇒(i) trivial

(iv)⇒(ii) Sei $x_0 \in E_1$ und (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$$\|T(x_n) - T(x_0)\|_2 = \|T(x_n - x_0)\|_2 \le \lambda \|x_n - x_0\|_1 \to 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$. //

Wir benutzen folgende Schreibweisen:

$L(E_1, E_2)$ Vektorraum aller linearen Abbildungen $T\colon E_1 \to E_2$.

$\mathcal{L}(E_1, E_2)$ Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $T\colon E_1 \to E_2$.

$\mathcal{L}(E_1)$ sei $\mathcal{L}(E_1, E_1)$.

Satz II. 2. 9. (i) $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ ist mit $\|\cdot\|$ ein normierter linearer Raum.

(ii) Wenn $(E_2, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist, ist auch $(\mathcal{L}(E_1, E_2), \|\cdot\|)$ vollständig

In diesem Satz ist auch enthalten: $\|T\|$ ist wirklich eine Norm!

Beispiele II. 2. 1. (i) $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E_1 = \mathbb{K}^n$, $E_2 = \mathbb{K}^m$. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ seien beliebige Normen auf E_1 bzw. E_2. $\mathfrak{A}$ sei eine (m, n)-Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K}$. Dann definieren wir die lineare Abbildung

$$T_{\mathfrak{A}}(x) := \mathfrak{A} \cdot x.$$

In Analysis 2 zeigt man: $\|T_{\mathfrak{A}}\|_0 \le \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left|a_{ij}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_0$ mit $\|\cdot\|_0$ euklidischer Norm. Die Abbildung $\|T_{\mathfrak{A}}\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} \left|a_{ij}\right|^2}$ heißt *Hilbert-Schmidt-Norm* von $T_{\mathfrak{A}}$. Also ist $T_{\mathfrak{A}}$ beschränkt. Da alle Normen auf E_1 bzw. E_2 äquivalent sind, ist $T_{\mathfrak{A}}\colon (E_1, \|\cdot\|_1) \to (E_2, \|\cdot\|_2)$ auch beschränkt. Also gilt: $L(E_1, E_2) = \mathcal{L}(E_1, E_2)$. In Linearer Algebra zeigten wir: jede lineare Abbildung $E_1 \to E_2$ ist von der Form $T_{\mathfrak{A}}$.

(ii) $E_1 = C[0,1] = E_2$, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. $K(s,t)$ sei stetige Funktion auf $[0,1] \times [0,1]$. Wir definieren:

$$(T_K x)(s) := \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt$$

Wir zeigen: $T_K\colon E_1 \to E_2$ ist ein beschränkter Operator: Da $K(s,t)x(t)$ stetig in (s,t) ist, ist auch $T_K x(s)$ stetig. Es gilt $T_K x \in E_2$ für $x \in E_1$:

$$\begin{aligned}
\|T_K x\| &= \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt \\
&\leq \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 \sup_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]} |K(s,t)|\,|x|\ dt \\
&\leq \|K\|\,\|x\| \quad \Rightarrow \|T_K\| \leq \|K\|
\end{aligned}$$

(iii) *Differentiationsoperatoren:*

$$\begin{aligned}
E_1 &:= C^\infty[0,1] & \|f\|_1 &:= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} \left|f'(t)\right| \\
E_2 &:= C^\infty[0,1] & \|f\|_2 &:= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|
\end{aligned}$$

Sei $T(f)(t) := f'(t)$. Dann haben wir

$$\|T(f)\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} \left|f'(t)\right| \leq \|f\|_1$$

Also ist T beschränkt und es gilt $\|T\| \leq 1$.

Hat aber E_1 die Norm $\|\cdot\|_2$, so gilt für $f_n(t) = t^n$: $\|f_n\|_2 = 1$, mit $T(f_n) = nt^{n-1}$ haben wir $\|T(f_n)\| = n$, und das ist nicht beschränkt, da

$$\begin{gathered}
\|T(f)\|_2 \leq \lambda \|f\|_2 \\
\text{mit } f = f_n \quad n \leq \lambda \cdot 1 \quad \forall n
\end{gathered}$$

ein Widerspruch ist.

(iv) *Fouriertransformation:* Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ definieren wir:

$$F(f)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} f(s)\,ds.$$

Das Integral existiert, weil $\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{its} f(s)\right|\ ds = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\ ds < \infty$, da $f \in L^1(\mathbb{R})$. Es gilt

$$|F(f)(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{für festes } t,$$

also $\|F(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$. F ist eine beschränkte lineare Abbildung des Banachraums $L^1(\mathbb{R})$ in den Banachraum $L^\infty(\mathbb{R})$ und $\|F\| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$.

Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ kann man definieren:

$$(Ff)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to-\infty} \lim_{B\to\infty} \int_A^B e^{its} f(s)\,ds$$

Man kann zeigen: F bildet $L^2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\mathbb{R})$ ab und es gilt:

$$\|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} f(s)\, ds \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

$$F^{-1} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(s)\, ds \quad \text{FOURIER'sche Integrationsformel}$$

(v) Shiftoperator: Sei $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$. Dann gilt:

$$\|S(x)\|^2 = 0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots = \|x\|^2$$

S ist also beschränkter linearer Operator und $\|S\| = 1$. ✓

c. Der duale Raum

$(E, \|\cdot\|)$ sei normierter linearer Raum über $\mathbb{C}$. Sei $F = \mathbb{C}$, $\|x\| := |x|$.

Definition II. 2. 10 *(Dualer Raum)*. Der Raum $E' := \mathcal{L}(E, F)$ heißt *dualer Raum zu E*. ♡

Da F vollständig ist, ist E' auch vollständig, also ein Banachraum. D. h. E' ist Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale f auf E. Die Norm von $f \in E'$ ist $\|f\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in E}} |f(x)|$.

Beispiele II. 2. 2. (i) $E = L^p(X,\mu)$, $1 < p < \infty$. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $g \in L^q(X,\mu)$, dann definieren wir

$$F_g(f) := \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x), \qquad f \in L^p(X,\mu)$$

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) = \|fg\|_{L^1(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mu)} < \infty$$

Nach HÖLDER'scher Ungleichung. Also existiert $F_g(f)$ und

$$\left|F_g(f)\right| \leq \int |f(x)g(x)| \, d\mu(x) < \|f\| \, \|g\|$$

Also $F_g \in L^p(X,\mu)'$ und $\left\|F_g\right\| \leq \|g\|_{L^q(X,\mu)}$. Man kann zeigen: $\left\|F_g\right\| = \|g\|$. Jedes $F \in L^p(X,\mu)'$ ist von der Form F_g. Also $L^p(X,\mu)' \cong L^q(X,\mu)$.

(ii) $p = 1$, $q = \infty$. (X,μ) sei σ-finiter Maßraum. Dann kann man zeigen:

$$L^1(X,\mu)' \cong L^\infty(X,\mu)$$

(iii) $p = \infty, q = 1$. Dann gilt:

$$L^\infty(X,\mu)' \supseteq L^1(X,\mu),$$

i. a. gilt $L^\infty(X,\mu)' \supset L^1(X,\mu)$.

(iv) $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ sei Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Nach Satz I. 4. 11 sind alle stetigen linearen Funktionale von der Form

$$F_y(x) = \langle x\,|\,y\rangle \qquad x \in E, y \in E \text{ fest}$$

Wir zeigen $\left\|F_y\right\| = \|y\|$:

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left|F_y(x)\right| &= |\langle x\,|\,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \Rightarrow \left\|F_y\right\| \leq \|y\| \\
\left|F_y(y)\right| &= \|y\|^2 \leq \left\|F_y\right\|\,\|y\|
\end{aligned}$$

/

Sei E^+ folgender Raum: $E^+ = E$ als Menge, Addition in E^+ ist die Addition in E, skalare Multiplikation in E^+ sei die Multiplikation mit dem komplex konjugierten in E: $\lambda \circ x = \overline{\lambda} \cdot x$, Norm von E^+ ist die Norm von E. Dann gilt $\lambda F_y = F_{\lambda \circ y}$ für $\lambda \in \mathbb{C}, y \in E$. Die Abbildung $E^+ \ni y \mapsto F_y \in E'$ ist eine isometrische lineare Abbildung von E^+ auf E'. Allgemein: $E' = E^+$ für jeden Hilbertraum.

(v) Sei $E = C\,[0,1]$. E' ist der Raum aller komplexen Borelmaße auf $[0,1]$. μ sei ein positives Borelmaß auf $[0,1]$. Wir definieren

$$F_\mu(f) := \int_{[0,1]} f(x)\,d\mu(x) \qquad f \in C\,[0,1]$$

$$\left\|F_\mu(t)\right\| \leq \|f\| \int_{[0,1]} d\mu(x) = \|f\|\,\mu([0,1])$$

mit $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Also ist $F_\mu \in C\,[0,1]$, $\left\|F_\mu\right\| \leq \mu([0,1])$.

Es seien nun $\mu_{1,2,3,4}$ positive Borelmaße. Wir definieren:

$$\mu(M) := \mu_1(M) - \mu_2(M) + i(\mu_3(M) - \mu_4(M)), \quad M \in \mathcal{B}([0,1])$$

μ ist ein komplexes Borelmaß, und alle lassen sich so schreiben. Wir definieren:

$$F_\mu(f) := \int f(x)\,d\mu(x) := \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2 + i\int f\,d\mu_3 - i\int f\,d\mu_4$$

$F_\mu(f)$ ist dann auch im Dualraum. Also $F_\mu \in C\,[0,1]'$. Nach Satz I. 4. 11 ist

$$C\,[0,1]' = \left\{ F_\mu \;\middle|\; \mu \text{ kompl. Borelmaß} \right\}.$$

Allgemein gilt: Sei X kompakter metrischer Raum.

$$C(X)' = \left\{ F_\mu \;\middle|\; \mu \text{ komplexes Borelmaß} \right\}$$

✓

3. Das Banach-Steinhaus-Theorem

a. Das Banach-Steinhaus-Theorem

Satz II. 3. 1 (Banach-Steinhaus). E sei Banachraum und F ein normierter linearer Raum. $\{T_i, i \in I\}$ sei Familie von stetigen linearen Abbildungen von $E \to F$. Die Familie T_i sei punktweise beschränkt, d. h.

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| = c_x < \infty \quad \forall x \in E$$

Dann ist $\{T_i\}$ gleichmäßig beschränkt, d. h.

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$$

Bemerkung II. 3. 1. $\sup_{i\in I} \|T_i\| = \sup_{i\in I} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_i(x)\| < \infty$

Beweis (von Satz II. 3. 1): Sei $A_n := \{ x \in E \mid \|T_i(x)\| \leq n \quad \forall i \in I \} = \{ x \in E \mid c_x \leq n \}$. Da alle Familien punktweise beschränkt sind, gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$. Nach Satz II. 1. 3 existieren $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ mit

$$\overline{A_{n_0}} \supseteq K_\varepsilon(x_0).$$

Da $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$ ist A_n abgeschlossen, also $\overline{A_{n_0}} = A_{n_0}$, $A_{n_0} \supseteq K_\varepsilon(x_0)$. Sei $y \in E$, $\|y\| \leq 1$. Sei $x := x_0 + \varepsilon y$. Dann $x \in K_\varepsilon(x_0)$, denn $\|x - x_0\| = \|\varepsilon y\| \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \|T_i(y)\| &= \left\| T_i\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon} (\|T_i(x)\| + \|T_i(x_0)\|) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}(n_0 + c_{x_0}). \end{aligned}$$

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|T_i(y)\| = \|T_i\| \leq \frac{1}{\varepsilon}(n_0 + c_{x_0}) \qquad //$$

Zusatz: Seien $E, F, \{T_i\}$ wie in Satz II. 3. 1. Sei $E_1 = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty \right\}$. Dann folgt: Entweder gilt $E = E_1$ oder E_1 ist von 1. Kategorie.

b. Folgerungen aus Banach-Steinhaus

Problem: E, F seien normierte lineare Räume, $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in E$ existiere $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ in F. Definiere: $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Dann ist T eine lineare Abbildung $E \to F$. Frage: Ist T stetig? Im allgemeinen leider nein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel II. 3. 2. Sei $E = F = d := \{ (x_1, \dots, x_n, 0 \dots) \mid x_i \in \mathbb{C} \}$ der Vektorraum aller finiten Folgen. Wir definieren $\|(x_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Seien

$$\begin{aligned} T_k(x_1, \dots, x_n, 0, \dots) &= (1 \cdot x_1, \dots, k \cdot x_k, 0, \dots) \\ T(x_1, \dots, x_n, 0, \dots) &= (x_1, \dots, nx_n, 0, \dots) \end{aligned}$$

Behauptung: $\|T_k\| \leq k$, $T_k \in \mathcal{L}(E,F)$.
Beweis:

$$\|T_k(x_n)\| = \sup_{j \leq k} \left|jx_j\right| \leq k \sup_{j \in \mathbb{N}} \left|x_j\right| = k \, \|x_n\|$$ /

Behauptung: T ist nicht beschränkt.

Beweis: $T(0,\ldots,0,1,0,\ldots) = (0,\ldots,n,0,\ldots)$

$$\|T(e_n)\| = n, \quad \|e_n\| = 1$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $c > 0$ mit $\|T(x)\| \leq c\,\|x\| \ \ \forall x \in E$. /

Behauptung: $\lim T_k(x) = T(x) \quad \forall x \in E$

Beweis: Sei $x \in E$. Dann existiert $r \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0 \ \forall n > r$. Dann gilt $T_k(x) = T(x) \ \forall k > r$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} T_k(x) = T(x)$$ /

✓

Korollar II. 3. 2. Sei E Banachraum, F normierter linearer Raum, $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$, $T \in L(E,F)$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x) \ \forall x \in E$. Dann ist T stetig. Es gilt $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Beweis: Da $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existiert, gilt insbesondere $\sup_{n\to\infty} \|T_n(x)\| < \infty \ \forall x \in E$. Nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS (Satz II. 3. 1) folgt: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = c < \infty$. Es gilt also

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \, \|x\| \leq c\,\|x\|\,,$$

mit $n \to \infty$ folgt $\|T(x)\| \leq c\,\|x\| \Rightarrow T$ stetig.
Sei $I := \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. Dann existiert Folge (T_{n_k}) mit $\left\|T_{n_k}\right\| \to I$. Es ist auch

$$\left\|T_{n_k}(x)\right\| \leq \left\|T_{n_k}\right\| \|x\|\,,$$

mit $k \to \infty$ folgt

$$\|T(x)\| \leq I\,\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|T\| \leq I.$$ //

Insbesondere gilt Korollar II. 3. 2 für $F = \mathbb{C}$, also wenn $f_n \in E'$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle x, dann gilt $E \ni f(x) := \lim f_n(x)$.

Korollar II. 3. 3 (MAZUR-ORLICZ). E, F seien Banachräume. $B(\cdot,\cdot)$ sei eine Bilinearform auf $E \times F$, d. h.

$$B(\lambda e + f, g) = \lambda B(e,g) + B(f,g), \quad B(e, \lambda g + h) = \lambda B(e,g) + B(e,h) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall e, f \in E, \forall g, h \in F$$

B sei partiell stetig, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} B(e_n, f) = B(e, f) \text{ und } \lim_{n\to\infty} B(\tilde{e}, f_n) = B(\tilde{e}, \tilde{f})$$

für alle $e_n \to e$ und $f_n \to \tilde{f}$, bei jeweils festen f und $\tilde{e}$.
Dann ist B gleichzeitig stetig, d. h. wenn $\lim_{n\to\infty} e_n = e$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} B(e_n, f_n) = B(e, f).$$

Beweis: Es gilt
$$B(\underbrace{e_n - e}_{\to 0}, f_n) + B(e, \underbrace{f_n - f}_{\to 0}) = B(e_n, f_n) - B(e, f),$$
daher reicht es, die Behauptung für $e = 0$ und $f = 0$ zu zeigen. Sei also $f = 0$.

Sei $T_n(x) = B(e_n, x)$, $x \in F$. Dann ist $T_n \in F'$.
$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} B(e_n, x) = B(e, x),$$
da B partiell stetig. Da (T_n) punktweise beschränkt ist, ist $c := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ nach Banach-Steinhaus (Satz II. 3. 1).
$$|B(e_n, f_n)| = |T_n(f_n)| \leq \|T_n\| \, \|f_n\| \leq c \, \|f_n\|$$
Da $f_n \to 0$ folgt
$$\lim_{n\to\infty} B(e_n, f_n) = 0 = B(e, 0),$$
d. h. Behauptung gezeigt für $f = 0$. Analog zeigt man das für $e = 0$. //

Korollar II. 3. 4 (Kondensationsprinzip für Singularitäten). E sei Banachraum, F normierter linearer Raum. Sei $T_{n,m} \in \mathcal{L}(E, F)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gebe es $x_n \in E$ mit
$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| T_{n,m}(x_n) \right\| = \infty. \tag{$*$}$$
Dann ist die Menge
$$M := \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| T_{n,m} x \right\| = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$
eine nichtleere Menge von 2. Kategorie.

Beweis: Sei $A_n := \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_m \left\| T_{n,m}(x) \right\| < \infty \right\}$. Nach Zusatz in Satz II. 3. 1 ist A_n entweder E oder von 1. Kategorie. Wegen ($*$) ist $A_n \neq E$, also ist A_n von 1. Kategorie. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist von 1. Kategorie $\Rightarrow M = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist von 2. Kategorie. Insbesondere ist M nichtleer, denn sonst wäre $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und damit von 1. Kategorie im Widerspruch zu Satz II. 1. 3. //

4. Sätze von der offenen Abbildung und vom geschlossenen Graphen

a. Satz von der offenen Abbildung

Für zwei Mengen A und B, für deren Elemente die Operation $-$ definiert ist, bezeichne $A - B = \{ a - b \mid a \in A, b \in B \}$.

Satz II. 4. 1 *(Offene Abbildung).* E, F seien Banachräume. T sei stetige lineare Abbildung von E auf F (surjektiv). Dann ist T offen, d. h. T bildet offene Mengen in offene Mengen ab.

Beweis: U sei offen in E. Zu zeigen: $T(U)$ ist offen in F. Da T linear ist, reicht es zu zeigen, daß $T(U_\varepsilon(0))$ für $\varepsilon > 0$ eine Kugel $U_\delta(0)$ in F enthält. (mit $U_\varepsilon(0) := \{ x \in E \mid \|x\| < \varepsilon \}$).

1. Schritt: $\overline{T(U_\varepsilon(0))}$ enthält Kugel $U_\delta(0)$ in F.

Beweis: Sei $U = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$. Aus $E = \bigcup_{n=1}^\infty nU$ folgt $F = T(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(U)$. F ist Banachraum, nach Satz II. 1. 3 gibt es $m \in \mathbb{N}, y \in F, \alpha > 0$ mit

$$\overline{mT(U)} \supseteq U_\alpha(y).$$

Aus $U_\varepsilon(0) \supseteq U - U$ folgt $T(U_\varepsilon(0)) \supseteq T(U) - T(U)$,

$$\overline{T(U_\varepsilon(0))} \supseteq \overline{T(U) - T(U)} \supseteq \overline{T(U)} - \overline{T(U)} \supseteq \underbrace{\frac{1}{m}U_\alpha(y) - \frac{1}{m}U_\alpha(y)}_{=:(*)}$$

(denn $x - y \in \overline{T(U)} - \overline{T(U)}$, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n - y_n \in T(U) - T(U) \Rightarrow x - y \in \overline{T(U) - T(U)}$) und

$$(*) = \frac{1}{m}(U_\alpha(y) - U_\alpha(y)) = \underbrace{\bigcup_{z\in\frac{1}{m}U_\alpha(y)} \underbrace{\left\{z - \frac{1}{m}\underbrace{U_\alpha(y)}_{\text{offen}}\right\}}_{\text{offen}}}_{\text{offen}} =: \tilde{U}$$

mit $\tilde{U} \ni 0 \quad \Rightarrow \overline{T(U_\varepsilon(0))} \supseteq U_\delta(0)$. /

2.Schritt $T(U_\varepsilon(0))$ enthält Kugel um 0 in F.

Beweis: Wähle positive Zahlen r_n mit $\sum_{n=0}^\infty r_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $r_0 < \varepsilon/2$. Sei $E_\alpha = U_\alpha(0)$ in E, $F_\alpha = U_\alpha(0)$ in F. Nach dem 1. Schritt $\exists \delta_n > 0$ mit $F_{\delta_n} \subseteq \overline{T(E_{r_n})}$. O. B. d. A. sei $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Sei $y \in F_{\delta_0} \Rightarrow y \in \overline{T(E_{r_0})}$, d. h. $\|y - T(x_0)\| < \delta_1$ mit $x_0 \in E_{r_0}$. $y - T(x_0) \in F_{\delta_1} \subseteq \overline{T(E_{r_1})}$, d. h. $\|y - T(x_0) - T(x_1)\| < \delta_2$ mit $x_1 \in E_{r_1}$. Fortsetzen des Verfahrens liefert Folge

$$(x_n) \in E_{r_n}, \quad \|y - T(x_0) - \cdots - T(x_n)\| < \delta_{n+1}.$$

Da $\|x_n\| < r_n$ und $\sum_{n=0}^\infty r_n < \frac{\varepsilon}{2}$, $\sum_{n=0}^\infty \|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also konvergiert die Reihe $x_0 + \sum_{n=1}^\infty x_n$ in E, denn E ist Banachraum, etwa gegen $x \in E$. Mit $\left\|y - T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right)\right\| < \delta_{n+1}$ haben wir

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\|y - T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right)\right\| = \left\|y - T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n x_k\right)\right\| = \|y - Tx\| \leq 0$$

Daraus folgt: $\|y - T(x)\| = 0 \;\Rightarrow\; y = T(x)$. y war beliebig aus f_δ. $\|x\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $x \in E_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Das heißt, $F_{\delta_0} \subseteq T(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0))$. /

Korollar II. 4. 2. T sei bijektive stetige lineare Abbildung eines Banachraums E auf einen Banachraum F. Dann ist T^{-1} stetig.

Beweis: Nach Satz II. 4. 1 ist T offen, d. h. $T(U)$ offen wenn U offen. D. h. für T^{-1} ist das Urbild offener Mengen stets offen. //

b. Satz vom abgeschlossenen Graphen

Definition II. 4. 3 *(Graph von T)*. Sei $T \in L(E, F)$, $G(T) := \{ (x, T(x)) \mid x \in E \}$ heißt *Graph von* T. ♡

Definition II. 4. 4 *(Abgeschlossener Graph)*. Sei $T \in L(E, F)$. T heißt *abgeschlossen*, wenn $G(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von $E \oplus F$ ist. ♡

Bemerkung II. 4. 1.

(i) $G(T)$ abgeschlossen heißt: aus $x_n \to x$ in E und $T(x_n) \to y$ in F folgt stets $(x, y) \in G(T)$, d. h. $y = T(x)$.

(ii) T stetig $\Rightarrow G(T)$ abgeschlossen, denn aus $x_n \to x$ in E folgt $T(x_n) \to T(x)$.

(iii) Wenn $x_n \to x$, dann $T(x_n) \not\to T(x)$, z. B.: $T(x_n)$ konvergiert nicht, oder $T(x_n) \to y \neq T(x)$.

Satz II. 4. 5. Sei $T \in L(E, F)$. T ist abgeschlossen $\iff$ aus $x_n \to 0$ in E und $T(x_n) \to y$ in F $\Rightarrow y = 0$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Aus $x_n \to 0$ und $T(x_n) \to y$ folgt $T(0) = 0 = y$.
„$\Leftarrow$“: Sei $x_n \to 0$ und $T(x_n) \to y$. Dann ist $x_n - x \to 0$, $T(x_n - x) \to y - T(x)$. Nach Kriterium folgt $y - T(x) = 0$, also $y = T(x)$, also $T(x)$ abgeschlossen. //

Beispiel II. 4. 2. Sei $a = (a_n)$ eine komplexe Folge. Sei $d = \{ (x_n) \mid \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k\ x_n = 0 \}$, d ist Raum der finiten Folgen. $\|(x_n)\| := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Definiere $T_a(x_n) = (a_n x_n)$.

Behauptung: T_a ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $x^k \in d$ mit $x^k \to x$ in d und $T(x^k) \to y$ in d. Dann folgt insbesondere $\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$, $\lim_{k\to\infty} T_a(x^k)_n \equiv \lim_{k\to\infty} a_n x_n^k = y_n$, also $\lim_{k\to\infty} a_n x_n^k = a_n x_n$. Die Eindeutigkeit des Grenzwertes liefert: $a_n x_n = y_n$, d. h. $T_a(x) = y$. /

✓

Satz II. 4. 6 *(vom abgeschlossenen Graphen, Closed Graph Theorem)*. E sei Banachraum, F normierter linearer Raum, T sei eine abgeschlossene lineare Abbildung von E in F. Dann ist T stetig.

Beweis: Da T abgeschlossen ist, ist $G(T)$ abgeschlossen in $E \oplus F$. O. B. d. A. sei F auch vollständig (sonst vervollständige) $\Rightarrow E \oplus F$ ist Banachraum, $G(T)$ als abgeschlossener Teilraum eines Banachraums ist selbst wieder Banachraum. Wir definieren $P_1(x, T(x)) = x$, P_1 ist lineare Abbildung des Banachraums $G(T)$ auf E. P_1 ist stetig: denn

$$\begin{aligned} \|P_1(x, T(x))\| &= \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| \\ &= \|(x, T(x))\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\|P_1\| \leq 1$. P_1 ist injektiv, denn wenn $P_1(x, T(x)) = 0 = x$, dann $T(x) = 0$, also $(x, T(x)) = (0, 0)$. Nach Korollar II. 4. 2 ist P_1^{-1} stetig. D. h. wenn $x_n \to x$, dann

$$P_1^{-1}(x_n) \equiv (x_n, T(x_n)) \to P_1^{-1}(x) = (x, T(x)).$$

Insbesondere: $T(x_n) \to T(x)$, d. h. T ist stetig. //

Korollar II. 4. 7. $\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \Rightarrow \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$.

5. Der Satz von HAHN-BANACH

E sei normierter linearer Raum. E' sei der Vektorraum der stetigen linearen Funktionale auf E. Problem: Gibt es „genügend viele“ stetige lineare Funktionale auf E? Z. B.: Gibt es zu jedem $x \in E$, $x \neq 0$, ein $f \in E'$ mit $f(x) \neq 0$? Folgt aus $x_1 \neq x_2$, daß es ein $f \in E'$ gibt mit $f(x_1) \neq f(x_2)$?

Die Antwort ist Ja – mit dem Satz von HAHN-BANACH.

a. Lemma von ZORN

Definition II. 5. 1 ***(Halbordnung).*** Eine *Halbordnung* auf einer Menge M ist eine Relation „$\leq$“ mit

(i) $x \leq x \quad \forall x \in M$

(ii) $x \leq y,\ y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z \quad \forall x, y, z \in M$

(iii) $x \leq y,\ y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in M$

Ein *maximales Element* ist ein $z \in M$, sodaß gilt $\forall x \in M: \ x \geq z \Rightarrow x = z$. ♡

Beispiel II. 5. 1. Sei $M = C_{\mathbb{R}}(X)$ der Vektorraum aller reeller stetiger Funktionen auf dem metrischen Raum (X, d). Wir definieren $f \leq g :\iff f(t) \leq g(t)\ \forall t \in X$. ✓

Lemma II. 5. 2 ***(von ZORN).*** Wenn jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke besitzt, dann hat die halbgeordnete Menge M mindestens ein maximales Element.

Beweis: Ist äquivalent zum Auswahlaxiom:

$$\{X_i\},\ X_i \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists M: \ M = \{\, x_i \mid x_i \in X_i \forall i \in I \,\}$$ //

b. HAHN-BANACH-Theorem für reelle Vektorräume

Definition II. 5. 3 ***(Halbnorm).*** E sei Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Eine *Halbnorm* auf E ist eine Abbildung $p\colon E \to [0, \infty[$ mit

(i) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$ ♡

Bemerkung II. 5. 2. Wenn noch gilt: $p(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$ dann ist p eine Norm.

Beispiele II. 5. 3. (i) $E = \mathbb{R}^2$, $p(x_1, x_2) = |x_1|$, dann ist p eine Halbnorm.

(ii) $E = C(x)$, X metr. Raum. Sei $x_0 \in X$. Definiere $p_{x_0}(f) := |f(x_0)|$

(iii) Sei E normierter linearer Raum, $f_1, \dots, f_n \in E'$.

$$p(x) = |f_1(x)| + \cdots + |f_n(x)|$$ ✓

Bemerkung II. 5. 4. Räume mit Topologien durch Halbnormen: lokalkonvexe Räume, z. B. Räume von Distributionen und von Grundfunktionen.

Satz II. 5. 4 ***(von Hahn-Banach).*** E sei reeller Vektorraum und p sei Halbnorm auf E. F sei ein linearer Teilraum von E. f sei ein lineares Funktional auf F mit $|f(x)| \le p(x)\ \forall x \in F$.
Dann gibt es ein lineares Funktional g auf E mit

(i) $f(x) = g(x)\ \forall x \in F$ (d. h. g ist Erweiterung von f)

(ii) $|g(x)| \le p(x)\ \forall x \in E$.

Beweis: **1. Schritt**
Aussage (ii) ist äquivalent zu: $g(x) \le p(x)\ \forall x \in E$. „$\Rightarrow$" ist klar. „$\Leftarrow$": Sei $g(x) \le p(x)\ \forall x \in E$. Dann gilt $-g(x) = g(-x) \le p(-x) = p(x) \Rightarrow |g(x)| \le p(x)$.

2. Schritt
Sei $x_0 \in E$, $x_0 \ne F$, $H := \{\, y + \lambda x_0 \mid y \in F, \lambda \in \mathbb{R} \,\} \equiv F + \mathbb{R} \cdot x_0$.

Behauptung: Die Behauptung gilt für den Raum H.

Beweis: Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $x_0 \ne F$, läßt sich jedes $z \in H$ eindeutig in der Form $z = y + \lambda x_0$ mit $y \in F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen. (Wäre $z = y + \lambda x_0 = y' + \lambda' x_0$ dann $y - y' = (\lambda - \lambda')x_0 \in E$ $\Rightarrow \lambda = \lambda' \Rightarrow y = y'$.) Wir definieren $g(z) = f(y) + \lambda c$. g ist dann lineares Funktional auf H mit $g(y) = f(y)$ für $y \in F$ (denn $g(y + \lambda x_0) = g(y) + \lambda g(x_0) = f(y) + \lambda c$). Es ist $g(x_0) = g(0 + 1x_0) = c$. Damit ist die Bedingung (i) erfüllt. c ist so zu wählen, daß (ii) gilt. Für $u, v \in F$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(u-v) &= f(u) - f(v) \le p(u-v) \le p(u-v) = p(u + x_0 - (x_0 + v)) \\
&\le p(u + x_0) + p(v + x_0) \\
\Rightarrow \quad -f(v) - p(v + x_0) &\le -f(u) + p(u + x_0) \\
\underbrace{\sup_{v \in F}(-f(v) - p(v + x_0))}_{=:c_1} &\le \underbrace{\inf_{u \in F}(-f(u) + p(u + x_0))}_{=:c_2}
\end{aligned}$$

Wähle $c \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \le c \le c_2$. Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(z) &= f(y) + \lambda c \le f(y) + \lambda c_2 \qquad \text{setze } u := \frac{y}{\lambda} \\
&\le \cancel{f(y)} + \lambda \underbrace{\Big(p\big(\underbrace{x_0 + \frac{y}{\lambda}}_{=x_0+u}\big) - \underbrace{\cancel{f\big(\frac{y}{\lambda}\big)}}_{=f(u)}\Big)}_{\ge c_2} = p(\lambda x_0 + y) = p(z)
\end{aligned}$$

Für $\lambda < 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(z) &= f(y) + \lambda c \le f(y) + \lambda c_1 \qquad \text{setze } v := \frac{y}{\lambda} \\
&\le \cancel{f(y)} + \lambda\Big(\cancel{-f\big(\frac{y}{\lambda}\big)} - p\big(x_0 + \frac{y}{\lambda}\big)\Big) = p(z)
\end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ gilt:

$$g(z) = g(y) = f(y) \le p(y) = p(z)$$

Also gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$g(z) \equiv f(y) + \lambda c \leq p(z) \equiv p(y + \lambda x_0)$$

D. h. Bedingung (ii) ist erfüllt. /

3. Schritt – Allgemeiner Fall
(Anwendung des Zorn'schen Lemmas)
M sei die Menge aller Paare (H_h, h), wobei

(i) H_h ist Vektorraum mit $F \subseteq H_h \subseteq E$ (als Teilräume)

(ii) h ist lineares Funktional auf H_h mit

  (1) $f(x) = h(x)\ \forall x \in F$

  (2) $|h(x)| \leq p(x)\ \forall x \in H_h$

Definiere Ordnung „$\leq$" auf M: $(H_{h_1}, h_1) \leq (H_{h_2}, h_2)$ wenn H_{h_1} Teilraum von H_{h_2} ist und $h_1(x) = h_2(x)\ \forall x \in H_{h_1}$.

Behauptung: M erfüllt die Voraussetzung von Zorn (Lemma II. 5. 2)

Beweis: Sei M_1 eine totalgeordnete Teilmenge von M. Wir zeigen: M_1 hat eine obere Schranke. Sei $H_{h_0} = \bigcup_{h \in M_1} H_h$. Definiere $h_0(x) = h(x)$, falls $x \in H_{h_0}$, $x \in H_h$. Sei $x \in H_{h_1} \cap H_{h_2}$ mit $(H_{h_1}, h_1), (H_{h_2}, h_2) \in M_1$. Da M_1 totalgeordnet, gilt $(H_{h_1}, h_1) \leq (H_{h_2}, h_2)$ oder $(H_{h_2}, h_2) \leq (H_{h_1}, h_1)$. D. h. $H_{h_1} \subseteq H_{h_2}$ oder $H_{h_2} \subseteq H_{h_1}$, also $x \in H_{h_1} \subseteq H_{h_2}$ oder $x \in H_{h_2} \subseteq H_{h_1}$. Also $h_1(x) = h_2(x)$ nach Definition der Ordnung. Die Definition ist damit korrekt. h_0 ist lineares Funktional auf H_{h_0} mit (ii).1 und (ii).2, also ist (H_{h_0}, h_0) eine obere Schranke für M_1. Nach Zorn'schem Lemma besitzt M ein maximales Element (H_{h_m}, h_m). Wenn $H_{h_m} = E$, dann ist der Beweis beendet mit $g = h_m$. Sei $H_{h_m} \neq E$. Dann $\exists x_0 \in E$ mit $x_0 \notin H_{h_m}$. Erweiterung wie im zweiten Schritt gibt Erweiterung g von h_m auf $H = \{\, y + \lambda x_0 \mid y \in H_{h_m}, \lambda \in \mathbb{R} \,\}$, die (i) und (ii) erfüllt. $\Rightarrow$ $(H_{h_m}, h_m) < (H, g)$ im Widerspruch zu (H_{h_m}, h_m) maximales Element. Also: $H_{h_m} = E$. /

//

c. Hahn-Banach-Theorem für komplexe Vektorräume

Vorbetrachtungen: $\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}$-lineare Funktionale. Sei f ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf komplexem Vektorraum E. Für $x \in E$ sei $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, wobei $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix) &= i f(x) = i f_1(x) + i^2 f_2(x) \\ f_1(ix) = -f_2(x), &\quad f_2(ix) = f_1(x) \end{aligned}$$

Ersetze $ix = y$: $f_2(y) = f_1(-iy)$. Also folgt:

$$f(x) = f_1(x) + i \underbrace{f_1(-ix)}_{\in \mathbb{R}}, \qquad f_1 \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}$$

Umgekehrt: Sei f_1 ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf komplexen Vektorraum E, d. h.

$$f_1 : E \to \mathbb{R}, \quad f_1(\lambda x + y) = \lambda f_1(x) + f_1(y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in E.$$

Dann definiere:

$$f(x) := f_1(x) + i f_1(-ix) \quad \forall x \in E$$

Nachrechnen ergibt: f ist $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf E.

Satz II. 5. 5 *(von Hahn-Banach für komplexe Vektorräume).* F sei linearer Teilraum des komplexen Vektorraums E. p sei eine Halbnorm auf E. f sei ein lineares Funktional auf F mit $|f(x)| \le p(x)\ \forall x \in F$. Dann existiert ein lineares Funktional g auf E mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in F$

(ii) $|g(x)| \le p(x) \quad \forall x \in E$

Beweis: Sei $f(x) = f_1(x) + i f_1(-ix)$ wie eben. Dann ist f_1 ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und $|f_1(x)| \le |f(x)| \le p(x)$. Nach Satz II. 5. 4 existiert $\mathbb{R}$-lineares Funktional g_1 zu f_1 mit

(i) $f_1(x) = g_1(x) \quad \forall x \in F$

(ii) $|g_1(x)| \le p(x) \quad \forall x \in F$.

Definiere $g(x) = g_1(x) + i g_1(-ix),\ x \in E$. Nach der Vorbetrachtung ist g ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional. Da g_1 Erweiterung von f_1 ist, ist g Erweiterung von f.

Noch zu zeigen: $|g(x)| \le p(x)\ \forall x \in E$.
Sei $x \in E$. Dann $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\varphi} g(x) = |g(x)|$. Also

$$g(e^{i\varphi}x) = e^{i\varphi} g(x) = |g(x)| = g_1(e^{i\varphi}x) + \underbrace{i g_1(-ie^{i\varphi}x)}_{=0}$$
$$|g(x)| = g_1(e^{i\varphi}x) \le p(e^{i\varphi}x) = \underbrace{\left|e^{i\varphi}\right|}_{=1} p(x) = p(x)$$

Damit ist (ii) erfüllt. //

d. Anwendung auf die Existenz „hinreichend vieler“ stetiger linearer Funktionale

$(E, \|\cdot\|)$ sei normierter linearer Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Korollar II. 5. 6. f sei stetiges lineares Funktional auf einem linearen Teilraum F von E. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional g auf E mit $f(x) = g(x)\ \forall x \in F$ und $\|f\| = \|g\|$.

Beweis: Wende Hahn-Banach an auf die Halbnorm

$$p(x) := \|f\|\,\|x\| \quad x \in E.$$

Es gilt $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = p(x)\ \forall x \in F$. sei g wie im Theorem. Dann gilt: $\|f\| \leq \|g\|$, weil g Erweiterung von f ist. Es gilt auch

$$|g(x)| \leq p(x) = \|f\|\,\|x\| \quad \forall x \in E$$

also

$$\|g\| \leq \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|f\| = \|g\|\,. \qquad /\!\!/$$

Korollar II. 5. 7. (i) $\forall x \in E,\ x \neq 0\ \exists f_x$ stetiges lineares Funktional auf E mit $f_x(x) = \|x\|$ und $\|f_x\| = 1$.

(ii) $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2\ \exists g \in E'$ mit $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Beweis: (i)⇒(ii) folgt aus (i) angewandt auf $x = x_1 - x_2$.

Zeige also (i): Sei $F = \mathbb{K}x$ der von x erzeugte Vektorraum. Wir definieren: $f(\lambda x) = \lambda\,\|x\|$. f ist lineares Funktional auf F mit

$$|f(\lambda x)| \leq |\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\|\,,$$

d. h. f stetig. Erweitere f zu einem stetigen linearen Funktional f_x mit $\|f_x\| = \|f\|$. Es ist $\|f\| = 1$, $f_x(x) = f(x) = \|x\|$. $/\!\!/$

Korollar II. 5. 8. Sei E ein Banachraum, $x \in E$. Dann gilt

$$\|x\| = \sup\left\{\, |f(x)| \;\middle|\; f \in E',\ \|f\| \leq 1 \,\right\}$$

Beweis: Es gilt stets $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$ für $x \in E,\ f \in E'$. Also $\sup\{\dots\} \leq \|x\|$. Nach Korollar II. 5. 7 $\exists f_x \in E'$ mit $f_x(x) = \|x\|$, $\|f_x\| = 1$. Also gilt $\sup\{\dots\} \geq f_x(x) = \|x\|$. $/\!\!/$

Wir definieren zu gegebenem $x \in E$

$$h_x(f) = f(x) \quad f \in E', \qquad h_x \colon E' \to \mathbb{K}$$

$|h_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$, also ist h_x stetig. Mit Korollar II. 5. 8 gilt $\|h_x\| = \|x\|$. h_x ist auch linear, d. h. $h_x \in (E')' = E''$. Umformulierung: Die Abbildung $x \mapsto h_x$ ist eine Isometrie von E in den Bidual E''. Im Sinne dieser Isometrie: $E \subseteq E''$.

Definition II. 5. 9 *(reflexiv)*. E heißt *reflexiv*, wenn $E = E''$. ♡

Beispiele II. 5. 5. (i) $L^p(X, \mu)$, $1 < p < \infty$ ist reflexiv. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bekannt: $(L^p(X, \mu))' = L^q(X, \mu)$.

$$\Rightarrow \quad (L^p(X, \mu))'' = (L^q(X, \mu))' = L^p(X, \mu)$$

(ii) nicht reflexiv sind z. B. $L^1(X, \mu)$, $L^\infty(X, \mu)$, $C\,[a, b]$.

$$c_0 = \left\{\, x = (x_n) \in \ell^\infty \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \,\right\}$$

Es gilt $(c_0)' = \ell^1$, $(\ell^1)' = \ell^\infty \Rightarrow (c_0) \subseteq \ell^\infty$, $c_0'' = \ell^\infty$. c_0 ist nicht reflexiv, ℓ^1, ℓ^∞ nicht reflexiv. ✓

Bemerkung II. 5. 6. In Satz II. 5. 4 kann man statt einer Halbnorm p auch ein sublineares Funktional p verwenden. Der Beweis ist fast identisch, aber für Anwendungen günstiger.

Definition II. 5. 10 *(sublinear)*. Eine Abbildung $p\colon E \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear*, falls gilt:

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda > 0,\ x \in E$.

(ii) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ für $x, y \in E$. ♡

Beispiele II. 5. 7. (i) Jede Halbnorm ist sublinear.

(ii) $p(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$, $x = (x_n) \in \ell^\infty$ ist sublinear. ✓

Bemerkung II. 5. 8. p kann auch negative Werte annehmen, im Gegensatz zur Halbnorm.

Geometrische Interpretation einer Folgerung aus Satz II. 5. 4: Je zwei verschiedene Punkte $x, y \in E$ können durch ein Funktional $f \in E'$ getrennt werden in dem Sinne, daß $f(x) \ne f(y)$ bzw. $\exists \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$x \in \{f < \beta\} \qquad y \in \{f > \beta\},$$

d. h. die Hyperebene $\{f = \beta\}$ trennt x und y.

Frage: Kann man dies auf Mengen verallgemeinern? Oder: für welche Mengen U, V, $U \cap V = \varnothing$ in einem reellen Banachraum $\exists f \in E'$ mit $\sup_{u\in U}\{f(u0)\} \le \inf_{v\in V}\{f(v)\}$. Offensichtlich notwendig für allgemeinen Satz: U, V konvex.

Definition II. 5. 11 *(Minkowski-Funktional)*. Das Minkowski-*Funktional* einer Teilmenge A eines normierten linearen Raumes E ist definiert als

$$\begin{aligned} &p_A\colon E \to [0,\infty] \\ &p_A(x) = \inf\left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \frac{x}{\lambda} \in A \right\} \quad (\text{mit } \inf\varnothing = \infty) \end{aligned}$$ ♡

Beispiel II. 5. 9. $A = \{\, x \in E \mid \|x\| \le 1 \,\}$ Einheitskugel $\Rightarrow$ $p_A(x) = \|x\|$. ✓

Lemma II. 5. 12. Sei $A \subseteq E$ konvex, wobei 0 ein innerer Punkt sei. Dann gilt:

(i) $K_\varepsilon(0) = \{\, x \in E \mid \|x\| \le \varepsilon \,\} \subseteq A \Rightarrow p_A(x) \le \frac{\|x\|}{\varepsilon}$

(ii) p_A ist sublinear.

(iii) $p_A(x) < 1 \;\Rightarrow\; x \in A$, $p_A(x) \ge 1 \;\Rightarrow\; x \notin A$ für A offen.

Beweis: (i) $\|x\| \le \varepsilon$, also $\varepsilon\frac{x}{\|x\|} \in K_\varepsilon(0) \subseteq A$, also $p_A(x) \le \frac{\|x\|}{\varepsilon}$

(ii) $p_A(tx) = tp(x)\ \forall t > 0,\ \forall x \in E$. Noch zu zeigen: $p_A(x+y) \le p_A(x) + p_A(y)$. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\lambda \le p_A(x) + \varepsilon$, $\mu \le p_A(y) + \varepsilon$. Dann gilt $\frac{x}{\lambda} \in A$, $\frac{y}{\mu} \in A$. Also:

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{\le 1}\underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in A} + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{\le 1}\underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in A} \in A,$$

da A konvex. $\Rightarrow p_A(x+y) \le \lambda + \mu \le p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$; mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

(iii) Sei $p_A(x) < 1$. Dann wähle λ mit $p_A(x) < \lambda < 1$ und $\frac{x}{\lambda} \in A$. Dann ist $x = \lambda\frac{x}{\lambda} + (1-\lambda)0 \in A$, da A konvex. Sei A offen, $p_A(x) \geq 1$. Dann gilt $\forall \lambda < 1$ ist $\frac{x}{\lambda} \notin A$, d. h. $\frac{x}{\lambda} \in E \setminus A$. Wähle $\lambda_n \to 1$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{\lambda_n} = x \in E \setminus A$ da $E \setminus A$ abgeschlossen. //

Lemma II. 5. 13. Sei V offen und konvex, $0 \in V$. Dann $\exists f \in E'$ mit $f(v) < 0\ \forall v \in V$.

Beweis: Sei $x_0 \in V$ beliebig, setze $y_0 := -x_0$, $U := V - \{x_0\} = \{\, v - x_0 \mid v \in V \,\}$. U ist offen und konvex, $y_0 \notin U$, denn sonst $0 \in V$. Nach letztem Lemma ist $p_U \geq 1$. Wir definieren den Teilraum $F = \mathbb{R}y_0$ und $f\colon F \to \mathbb{R}$, $f(ty_0) := p_U(y_0)$. Dann gilt $f(y) \leq p_U(y)\ \forall y \in F$.

Wir wenden nun Satz II. 5. 4 an: es gibt eine Fortsetzung $g\colon E \to \mathbb{R}$ von f mit $g(x) \leq p_U(x)\ \forall x \in E$. Wir zeigen: g ist stetig: U ist offen, $0 \in U \Rightarrow\ \exists r > 0$ mit $K_r(0) \subseteq U$. Nach Lemma II. 5. 12 gilt: $\forall x \in E$ gilt $p_U(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$, also $g(x) \leq p_U(x) \leq \frac{\|x\|}{r} \Rightarrow x \in U$, $-g(x) = g(-x) \leq p_U(-x) \leq \frac{\|x\|}{r}$, also $|g(x)| \leq \frac{\|x\|}{r}$, also $\|g\| \leq \frac{1}{r}$, also $g \in E'$. Dann folgt: $g(y_0) = f(y_0) = p_U(y_0)$. $\forall v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} g(v) &= g(u + x_0) = g(u) - \underbrace{g(y_0)}_{\substack{=p_U(y_0)\\ =f(y_0)=1}} \\ &\leq p_U(u) - 1 < 0 \end{aligned}$$

//

Satz II. 5. 14 ***(Trennungssatz von* Hahn-Banach*).*** Sei E ein reeller normierter Raum, U, V disjunkte konvexe Teilmengen, U offen. Dann existiert ein lineares Funktional $g \in E'$ mit $g(u) < g(v)\ \forall u \in U,\ v \in V$. Insbesondere:

$$\sup_{u\in U} g(u) \leq \inf_{v\in V} g(v).$$

Kapitel III.

Beschränkte lineare Operatoren im Hilbertraum

1. Adjungierte, selbstadjungierte und unitäre Operatoren

Satz III. 1. 1 *(Adjungierter Operator)*. Sei $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$, d. h. T stetiger linearer Operator von E in E. Dann gelten:

(i) $\exists!\, S \in L(E)$ mit

$$\langle Tx\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,Sy\rangle \quad \forall x, y \in E.$$

S heißt der *zu T adjungierte* Operator, er wird mit T^* bezeichnet.

(ii) $T^* \in \mathcal{L}(E)$ und $\|T\| = \|T^*\| = \|T^*T\|^{\frac{1}{2}}$.

(iii) $\forall T, R \in \mathcal{L}$:

$$(\alpha T + R)^* = \overline{\alpha}T^* + R^*$$
$$(TR)^* = R^*T^*$$
$$(T^*)^* = T$$

Beweis: (i) Sei $y \in E$ fest. Wir definieren $F_y(x) = \langle Tx\,|\,y\rangle$, $F_y \in E'$. F_y ist stetig, denn

$$\left|F_y(x)\right| = |\langle Tx\,|\,y\rangle| \leq \|Tx\|\,\|y\| \leq \|T\|\,\|y\|\,\|x\|$$

nach Cauchy-Schwarz und daher $\left\|F_y\right\| \leq \|T\|\,\|y\|$. Nach Satz I. 4. 11 $\exists!\, y^* \in E$:

$$F_y(x) \equiv \langle Tx\,|\,y\rangle = \left\langle x\,|\,y^*\right\rangle \;\forall x \in E.$$

D. h. $\langle y^*\,|\,x\rangle = \langle y\,|\,Tx\rangle \;\forall x \in E$. Wir definieren $T^*y := y^*$. Diese Zuordnung ist wegen obiger Gleichung linear. Nach Definition ist $\langle y\,|\,Tx\rangle = \langle T^*y\,|\,x\rangle \;\forall x, y \in E$. Sei S ein anderer Operator mit $\langle Tx\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,Sy\rangle \;\forall x, y \in E$. Also: $\langle y\,|\,Tx\rangle = \langle Sy\,|\,x\rangle$. Damit folgt:

$$\langle T^*y - Sy\,|\,x\rangle = 0 \;\forall x, y \in E.$$

Setze $x = T^*y - Sy \Rightarrow T^*y - Sy = 0 \Rightarrow T^*y = Sy$

$$\Rightarrow \quad S = T^*$$

(ii) Wir zeigen zuerst: T^* ist beschränkt und $(T^*)^* = T$.

$$\left\|T^* y\right\| = \left\|y^*\right\| = \left\|F_y\right\| \leq \|T\| \, \|y\|$$

$\Rightarrow$ $\|T^*\|$ beschränkt und $\|T^*\| \leq \|T\|$. Es gilt

$$\langle x \,|\, Ty \rangle = \langle T^* x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, (T^*)^* y \rangle \quad \forall x, y \in E$$

$\Rightarrow$ $\langle x \,|\, Ty - (T^*)^* y \rangle = 0 \ \forall x, y \in E$. Setze $x = Ty - (T^*)^* y$ dann folgt

$$Ty = (T^*)^* y \ \Rightarrow \ T = (T^*)^*.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx \,|\, Tx \rangle = \langle T^* T x \,|\, x \rangle \\ &\leq \left\|T^* T x\right\| \|x\| \\ &\leq \left\|T^* T\right\| \|x\| \, \|x\| \leq \left\|T^*\right\| \|T\| \, \|x\|^2 \\ &\leq (\|T\| \, \|x\|)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^* T\| \leq \left\|T^2\right\| \Rightarrow \|T\| = \|T^* T\|^{\frac{1}{2}}$
$\|T^*\| \leq \|T\|$. Ersetze T durch T^*:

$$\left\|T^{**}\right\| = \|T\| \leq \left\|T^*\right\| \quad \Rightarrow \quad \|T\| = \left\|T^*\right\|$$

(iii) Übung. //

Definition III. 1. 2 ***(Algebra).*** Eine *Algebra* A über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist ein Vektorraum mit Multiplikation

$$A \times A \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in A \quad \text{mit}$$

(i) $a(bc) = (ab)c \ \forall a, b, c \in A$ (Assoziativität)

(ii) $(\lambda a + b)c = \lambda(ac) + bc$, $a(\lambda b + c) = \lambda(ab) + ac$, $\lambda(ab) = (\lambda a)b \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ a, b, c \in A.$ ♡

Definition III. 1. 3 ***($*$-Algebra).*** Eine $*$-*Algebra* über $\mathbb{C}$ ist eine Algebra A mit $a \mapsto a^*$ mit

(i) $(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda} a^* + b^* \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ a, b \in E$ (antilinear)

(ii) $(a^*)^* = a \ \forall a \in A$

(iii) $(ab)^* = b^* a^* \ \forall a, b \in A$

Die Abbildung $a \mapsto a^*$ heißt *Involution* der $*$-Algebra. ♡

Definition III. 1. 4 ***(Banachalgebra).*** Eine *Banachalgebra* ist eine Algebra A mit einer Norm mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(A, \|\cdot\|)$ ist Banachraum

(ii) $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\| \ \ \forall a, b \in A$ ♡

Definition III. 1. 5 *(C^*-Algebra)*. Eine *C^*-Algebra* ist eine Banachalgebra A, die auch eine $*$-Algebra ist, für die $\|a\| = \|a^*a\|^{\frac{1}{2}} \;\; \forall a \in A$ gilt. ♡

Bemerkung III. 1. 1. (i) Eine Norm auf einer $*$-Algebra mit der Eigenschaft

$$\|a\| = \left\|a^*a\right\|^{\frac{1}{2}} \;\; \forall a \in A$$

heißt C^*-Norm.

(ii) In jeder C^*-Algebra $(A, \|\cdot\|)$ gilt $\|a\| = \|a^*\| \;\; \forall a \in A$.

Satz III. 1. 6. Sei E ein Hilbertraum. $\mathcal{L}(E)$ ist C^*-Algebra mit der Operatorenmultiplikation als Multiplikation, der Operatornorm als Norm und der Abbildung $T \to T^*$ als Involution.

Beweis: Satz III. 1. 1 //

Beispiel III. 1. 2. X sei kompakter metrischer Raum, $A = C(X)$ Algebra der stetigen Funktionen.

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|\,, \;\; (f^*)(t) = \overline{f(t)} \text{ für } f \in C(X),\; t \in X.$$

A ist dann eine C^*-Algebra. A ist kommutativ und besitzt die Funktion $f_0(t) = 1 \;\forall t \in X$ als Einselement. D. h. A ist eine kommutative C^*-Algebra mit Eins.

C^*-Eigenschaft der Norm:

$$\begin{aligned} \left\|f^* f\right\| &= \sup_{t \in X} \left|(f^* f)(t)\right| = \sup_{t \in X} |f(t)|^2 \\ &= (\sup_{t \in X} |f(t)|)^2 = \|f\|^2 \\ \Rightarrow \quad \|f\| &= \left\|f^* f\right\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \qquad \checkmark$$

Das Theorem von Gelfand-Naimark besagt: Jede kommutative C^*-Algebra mit Einselement ist isometrisch isomorph zu einer C^*-Algebra $C(X)$, wobei X ein kompakter topologischer Hausdorff-Raum ist.

a. Selbstadjungierte Operatoren

Definition III. 1. 7 *(selbstadjungiert, normal)*. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $T = T^*$ gilt. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *normal*, wenn $T^*T = TT^*$ gilt. ♡

Einfache Eigenschaften:

(i) Jeder selbstadjungierte Operator ist normal.

(ii) Reelle Linearkombinationen selbstadjungierter Operatoren sind selbstadjungiert.

(iii) Seien $A, B \in \mathcal{L}(E)$ selbstadjungiert. Dann ist AB selbstadjungiert $\iff AB = BA$.

Beweis:

$$(AB)^* = B^*A^* = BA \quad \text{also} \quad (AB)^* = AB \iff BA = AB \qquad /$$

(iv) $T \in \mathcal{L}(E)$ ist normal $\iff \|Tx\| = \|T^*x\| \ \forall x \in E$

(v) Sei $T \in \mathcal{L}(E)$. T ist selbstadjungiert $\iff \langle Tx \,|\, x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x \in E$.

$\mathcal{L}(E)_h := \{\, T \in \mathcal{L}(E) \mid T^* = T \,\}$ ist Menge der beschränkten linearen selbstadjungierten Operatoren. $\mathcal{L}(E)_h$ ist ein reeller Vektorraum.

Definition III. 1. 8. Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)_h$. Wir definieren

$$T_1 \geq T_2 \quad :\iff \quad \langle T_1 x \,|\, x\rangle \geq \langle T_2 x \,|\, x\rangle \quad \forall x \in E$$ ♡

Diese Relation ist wohldefiniert, da $\langle T_i x \,|\, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Satz III. 1. 9. $\mathcal{L}(E)_h$ ist mit „$\leq$“ ein reeller halbgeordneter Vektorraum, d. h.

(i) $T_1 \geq T_2,\ T_2 \geq T_3 \quad \Rightarrow \quad T_1 \geq T_3 \quad \forall T_i$

(ii) $T_1 \geq T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_3 \geq T_2 + T_3$ und $\lambda T_1 \geq \lambda T_2 \quad \forall T_i \in \mathcal{L}(E)_h, \lambda \geq 0$

(iii) $T \geq 0,\ T \leq 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0.$

Beweis: (nur für (iii)): $T \geq 0 :\ \langle Tx \,|\, x\rangle \geq \langle 0(x) \,|\, x\rangle = 0 \quad \forall x \in E$. $0 \geq T$ heißt $0 \geq \langle Tx \,|\, x\rangle$, zusammen also $\langle Tx \,|\, x\rangle = 0 \ \forall x \in E$. Mit der Polarisierungsidentität folgt:

$$4\langle Tx \,|\, y\rangle = \underbrace{\langle T(x+y) \,|\, x+y\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle T(x-y) \,|\, x-y\rangle}_{=0} + i\,\underbrace{\langle T(x+iy) \,|\, x+iy\rangle}_{=0} - i\,\underbrace{\langle T(x-iy) \,|\, x-iy\rangle}_{=0} = 0$$

Also gilt $\langle Tx \,|\, y\rangle = 0 \ \forall x, y \in E$. Setze $y := Tx \ \Rightarrow$

$$\langle Tx \,|\, Tx\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Tx = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0$$ //

Beispiel III. 1. 3. $L^2[0,1] = E$ mit LEBESGUE-Maß. Für $f \in C[0,1]$ sei $T_f(\varphi) = f \cdot \varphi$ für $\varphi \in E$. T_f ist der Multiplikationsoperator. Man zeigt: $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$, denn

$$\left\langle T_f \varphi \,|\, \psi \right\rangle = \int_{[0,1]} f \cdot \varphi \cdot \overline{\psi}\, dx = \int \varphi \overline{\overline{f} \psi}\, dx = \left\langle \varphi \,|\, T_{\overline{f}} \psi \right\rangle$$

Wegen Eindeutigkeit in Satz III. 1. 1 gilt $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$. T_f ist genau dann selbstadjungiert, wenn $T_{\overline{f}} = T_f \iff f = \overline{f}$, d. h. $f(t) \in \mathbb{R} \ \forall t$.

Behauptung: $T_f = 0 \iff f = 0$

Beweis: Es ist klar, daß $f = 0 \Rightarrow T_f = 0$. Sei also $T_f = 0$. Sei $I = [0,1]$; $X_n := \left\{ x \in I \;\middle|\; |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$. Wähle φ, ψ so, daß $f\overline{\psi} = |f|\overline{\varphi}$. Mit $\varphi = \chi_{X_n}$ folgt

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle T_f \varphi \,|\, \psi \right\rangle &= \int_I f \varphi \overline{\psi}\, dx = \int_I |f| |\varphi|^2 \, dx \\ &\geq \int_{X_n} \frac{1}{n} \cdot 1\, dx = \frac{1}{n} \mu(X_n) \geq 0 \\ \Rightarrow \quad \mu(X_n) = 0 \end{aligned}$$

Also ist $\{\, x \mid |f(x)| > 0 \,\} = \bigcup_n X_n$ eine Nullmenge. Da f stetig: $f \equiv 0$. /

Behauptung: $T_f \geq 0 \iff f \geq 0$ auf I.

Beweis: Es gilt $\left\langle T_f\varphi \,|\, \varphi \right\rangle = \int_I f\varphi\overline{\varphi}\, dx$. Aus $f \geq 0$ folgt also $T_f \geq 0$.

T_f ist selbstadjungiert, da $\left\langle T_f\varphi \,|\, \varphi \right\rangle \in \mathbb{R}\ \forall \varphi$. Also: $(T_f)^* = T_{\overline{f}} = T_f$, damit $T_{f-\overline{f}} = 0$, also nach eben $\overline{f} - f = 0 \Rightarrow f = \overline{f} \Rightarrow f \in \mathbb{R}$. Sei $T_f \geq 0$. Angenommen, $\exists x_0 \in I : \ f(x_0) < 0$. Dann $\exists \varepsilon > 0\ \exists [c,d] = J$ mit $x_0 \in J$ und $f(x) \leq -\varepsilon\ \forall x \in J$. $\varphi := \chi_J$:

$$\begin{aligned}\left\langle T_f\varphi \,|\, \varphi \right\rangle &= \int_J f\varphi\overline{\varphi}\, dx = \int_J f \cdot 1\, dx \\ &\leq -\varepsilon \int_J 1\, dx = -\varepsilon(d-c) \\ &< 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $T_f \geq 0$. Also $f \geq 0$. /

Behauptung: T_f selbstadjungiert $\iff f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in I$.

Behauptung: $T_{f_1} \geq T_{f_2} \iff f_1(x) \geq f_2(x)\ \forall x \in I$

Beweis:

$$\begin{aligned}T_{f_1} \geq T_{f_2} &\iff \underbrace{T_{f_1} - T_{f_2}}_{T_{f_1-f_2}} \geq 0 \\ &\iff f_1(x) - f_2(x) \geq 0\ \forall x \in I \\ &\iff f_1(x) \geq f_2(x)\ \forall x \in I\end{aligned}$$

/

b. Unitäre und isometrische Operatoren

Definition III. 1. 10 *(unitär, isometrisch)*. Sei $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(E)$. T heißt *unitär* $:\iff$

$$TT^* = T^*T = \mathrm{id}\,.$$

T heißt *isometrisch* $:\iff$

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$$

♡

Satz III. 1. 11. (i) T ist isometrisch $\iff \langle Tx \,|\, Ty\rangle = \langle x \,|\, y\rangle \quad \forall x, y \in E$.

(ii) T ist unitär $\iff$ T ist isometrisch und $T(E) = E$.

Beweis: (i) „$\Rightarrow$“: $\|Tx\| = \|x\| \Rightarrow \langle Tx \,|\, Tx\rangle = \langle x \,|\, x\rangle$. Mit Polarisierungsidentität: $\langle Tx \,|\, Ty\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$.

„$\Leftarrow$“: setze $x = y$, dann folgt die Behauptung.

(ii) „$\Rightarrow$“: T sei unitär.

$$\begin{aligned} TT^*E = T(T^*E) = \mathrm{id}(E) = E &\quad\Rightarrow\quad T \text{ surjektiv} \\ \langle T^*Tx \,|\, x\rangle = \langle x \,|\, x\rangle = \langle Tx \,|\, Tx\rangle = \|x\|^2 &\quad\Rightarrow\quad T \text{ isometrisch} \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: T sei isometrisch und surjektiv.

$$\|Tx\| = \|x\| \quad\Rightarrow\quad (\ Tx = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0\ ) \quad\Rightarrow\quad T \text{ injektiv}$$

Da T surjektiv ist, ist T bijektiv. Es gibt also T^{-1} und es ist bijektiv. $\langle Tx \,|\, Ty\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$, da T isometrisch. Setze $y = T^{-1}z$ für $z \in E$. Damit:

$$\langle Tx \,|\, z\rangle = \left\langle x \,|\, T^{-1}z\right\rangle \quad \forall x, z \in E.$$

Nach der Eigenschaft von adjungierten Operatoren gilt $T^{-1} = T^*$, also

$$T^{-1}T = TT^{-1} = \mathrm{id} \;\Rightarrow\; T^*T = TT^* = \mathrm{id}$$

$\Rightarrow$ T ist unitär. //

Beispiele III. 1. 4. (i) Sei $E = \ell^2(\mathbb{N})$. Sei $S(x_1, \ldots) = (0, x_1, \ldots)$.

$$\|S(x_n)\|^2 = 0^2 + |x_1|^2 + \ldots = \|(x_n)\|^2$$

Damit also: $\|S(x)\| = \|x\| \;\Rightarrow\; S$ isometrisch. S heißt *(einseitiger) Shiftoperator.* S ist nicht unitär, da nicht surjektiv, da $E \ni (1, 0, \ldots) \notin S(E)$.

(ii) $E = \ell^2(\mathbb{Z})$.

$$S(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \ldots)$$

$\Rightarrow$ $\|S(x_n)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 = \|(x_n)\|^2 \Rightarrow S$ isometrisch. S ist surjektiv, also unitär. S heißt zweiseitiger Shiftoperator.

(iii) Fouriertransformation: Sei

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^k f^{(n)}(x)\right| < \infty \;\forall k, n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

z. B. $x^n e^{-\varepsilon x^2 + \beta x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ \forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \beta \in \mathbb{C}$. Man zeigt:

(1) $F(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wobei $(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t)\, dt$.

(2) $(F^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(3) Satz von Fourier-Plancherel:

$$\|F(f)\| = \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t)\, dt \right|}_{(Ff)(x)}{}^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht ist in $L^2(\mathbb{R})$, bildet F $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf eine dichte Menge in $L^2(\mathbb{R})$ ab. Wir setzen F zu einer stetigen Abbildung von $L^2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\mathbb{R})$ fort. Also ist die Fortsetzung von F auf $L^2(\mathbb{R})$ ist unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R})$.

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A} Ae^{itx} f(t)\,dt = (Ff)(x)$$

(iv) Matrizen: $E = \mathbb{C}^n$, $\langle x \mid y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}$, $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$T_{\mathfrak{A}}x = \mathfrak{A}x, \text{ also } (T_{\mathfrak{A}}x)_k := \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j.$$

$T_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}(E)$, $\|T_{\mathfrak{A}}\| \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$. $\mathfrak{A}^* = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$:

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mathfrak{A}}x \mid y\rangle &= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{kj}x_j\overline{y_k} \\
\langle x \mid T_{\mathfrak{A}^*}y\rangle &= \sum_{j=1}^n x_j\overline{(T_{\mathfrak{A}^*}y)_j} = \sum_{j=1}^n \overline{\sum_{k=1}^n b_{jk}y_k} \\
&= \sum_j\sum_k x_j\overline{b_{jk}y_k} \\
&= \sum_j\sum_k x_j a_{kj}\overline{y_k} \\
&= \langle T_{\mathfrak{A}}x \mid y\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\forall x,y \in E$ $(T_{\mathfrak{A}})^* = T_{\mathfrak{A}^*}$. $T_{\mathfrak{A}}$ ist selbstadjungiert $\iff$ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, das sind die hermitischen Matrizen.

(v) Integraloperatoren: Sei $E = L^2\,[0,1]$, $K(s,t) \in C([0,1]\times[0,1])$. Definiere

$$(T_K f)(s) := \int_0^1 K(s,t)f(t)\,dt \qquad f \in L^2\,[0,1]$$

Dies ist der Fredholm’sche Integraloperator mit Kern $K(\cdot,\cdot)$. In II. 2. 1 (ii) haben wir schon gezeigt: $T_K \in \mathcal{L}(E)$. Definiere $K^*(s,t) := \overline{K(t,s)}$. Dann:

$$\begin{aligned}
\langle T_K f \mid g\rangle &= \int_0^1\int_0^1 K(s,t)f(t)\overline{g(s)}\,dt\,ds \\
\langle f \mid T_{K^*}g\rangle &= \int_0^1 f(t)\overline{(T_{K^*}g)(t)}\,dt \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{\int_0^1 K^*(t,s)g(s)\,ds}\,dt \\
&= \int_0^1\int_0^1 f(t)\underbrace{\overline{K^*(t,s)}}_{K(s,t)}\overline{g(s)}\,ds\,dt \\
&= \int_0^1\int_0^1 K(s,t)f(t)\overline{g(s)}\,ds\,dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \langle T_K f \mid g\rangle = \langle f \mid T_{K^*}g\rangle \quad \forall f,g \in E$$

und $(T_K)^* = T_{K^*}$. Für $K(t,s) = K(s,t) \in \mathbb{R}$ folgt also $K = K^*$ und somit $T_K = (T_K)^*$. ✓

2. Projektionsoperatoren

a. Definition und Charakterisierung von Projektionsoperatoren

Sei E ein Hilbertraum und E_1 ein Unterraum (abgeschlossener Teilraum). Nach Satz I. 4. 7 wissen wir:

$$\forall x \in E\ \exists! x_1 \in E_1, x_2 \in E_1^\perp \text{ mit } x = x_1 + x_2.$$

Definition III. 2. 1 *(Projektionsoperator)*. Es sei $P_{E_1}x := x_1$. P_{E_1} ist ein linearer Operator von E in E. Nach Pythagoras gilt

$$\left\|P_{E_1}x\right\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$$

Also ist $P_{E_1} \in \mathcal{L}(E)$ mit $\left\|P_{E_1}\right\| \leq 1$. P_{E_1} heißt zum Unterraum E_1 gehörender *Projektionsoperator.* ♡

Aus der Definition sieht man schnell:

$$P_{E_1}x = x \quad \forall x \in E_1, \qquad P_{E_1}x = 0 \quad \forall x \in E_1^\perp$$

Satz III. 2. 2 *(Projektionsoperator)*. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ ist Projektionsoperator $\Longleftrightarrow$ $T^2 = T \ \wedge\ T = T^*$. Ist dies erfüllt, dann ist $E_1 := T(E)$ der zugehörige Unterraum von E.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $T = P_{E_1}$ Projektionsoperator. Sei $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_1^\perp$.

$$P_{E_1}(P_{E_1}x) = P_{E_1}x_1 = P_{E_1}x \quad \Longleftrightarrow \quad P_{E_1}^2 = P_{E_1}$$

Sei $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in E_1$, $y_2 \in E_1^\perp$.

$$\begin{aligned}\langle P_{E_1}x \,|\, y\rangle &= \langle x_1 \,|\, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1 \,|\, y_1\rangle + \langle x_1 \,|\, y_2\rangle = \langle x_1 \,|\, y_1\rangle \\ &= \langle x_1 \,|\, y_1\rangle + \langle x_2 \,|\, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2 \,|\, y_1\rangle = \langle x \,|\, P_{E_1}y\rangle \quad \forall x, y \forall E\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $P_{E_1}^* = P_{E_1}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $T^2 = T$, $T^* = T$. Sei $E_1 = T(E)$. Zu zeigen: $T = P_{E_1}$. Sei $x \in E$. $T(x) =: x_1 \in E_1$.

$$T(Tx) = T^2x = Tx = x_1 \in E_1$$

$\Rightarrow$ $T(E_1) = E_1$. Sei $x \in E$. Betrachte $x - Tx$. Wir zeigen: $x - Tx \in E_1^\perp$. Sei $z \in E_1$:

$$\langle x - Tx \,|\, z\rangle = \langle x \,|\, z\rangle - \langle Tx \,|\, z\rangle = \langle x \,|\, z\rangle - \langle x \,|\, Tz\rangle = 0$$

Also: $x_2 := x - Tx \in E_1^\perp \Rightarrow x = Tx + x_2$. Nach Eindeutigkeit der Riesz’schen Zerlegung ist $Tx = P_{E_1}x$. //

Der Projektionsoperator heißt auch Orthoprojektor, orthogonale Projektion oder Projekt$\begin{cases}\text{or} \\ \text{ion}\end{cases}$.

b. Eigenschaften von Projektionsoperatoren

Satz III. 2. 3. Seien P_{E_1} und P_{E_2} Projektionsoperatoren in E, E_1, E_2 seien die zugehörigen Unterräume. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $P_{E_1} + P_{E_2}$ ist Projektionsoperator

(ii) $P_{E_1} P_{E_2} = 0$

(iii) $E_1 \perp E_2$. Ist dies erfüllt, dann ist $E_1 \oplus E_2$ der projizierte Raum von $P_{E_1} + P_{E_2}$.

Beweis: „(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)“: Sei (i) erfüllt: $P_{E_1} + P_{E_2}$ ist Projektion. Dann:

$$\begin{aligned}
(P_{E_1} + P_{E_2})^2 &= P_{E_1} + P_{E_2} \\
&= P_{E_1}^2 + P_{E_2}^2 + P_{E_1}P_{E_2} + P_{E_2}P_{E_1} \\
&= P_{E_1} + P_{E_2} + P_{E_1}P_{E_2} + P_{E_2}P_{E_1} \\
\Rightarrow \quad P_{E_1}P_{E_2} + P_{E_2}P_{E_1} &= 0 \qquad\qquad (*) \\
P_{E_1} \cdot (*) \mid \quad P_{E_1}P_{E_2} + P_{E_1}P_{E_2}P_{E_1} &= 0 \qquad \text{aus } (*) \\
P_{E_1}P_{E_2}P_{E_1} + P_{E_2}P_{E_1} &= 0 \quad \mid (*) \cdot P_{E_1} \qquad \text{aus } (*) \\
\Rightarrow \quad P_{E_1}P_{E_2} = P_{E_2}P_{E_1} &= 0
\end{aligned}$$

Sei nun (ii) erfüllt, d. h. $P_{E_1}P_{E_2} = 0$.

$$\begin{aligned}
(P_{E_1}P_{E_2})^* &= 0 = P_{E_2}^* P_{E_1}^* = P_{E_2}P_{E_1} \\
(P_{E_1} + P_{E_2})^2 &= P_{E_1}^2 + P_{E_2}^2 + P_{E_1}P_{E_2} + P_{E_2}P_{E_1} = P_{E_1} + P_{E_2} \\
(P_{E_1} + P_{E_2})^* &= P_{E_1}^* + P_{E_2}^* = P_{E_1} + P_{E_2}
\end{aligned}$$

Also ist $P_{E_1} + P_{E_2}$ nach Satz III. 2. 2 Projektion.
Der Rest wird dem geneigten Leser zur Übung überlassen. //

Satz III. 2. 4. P_{E_1} und P_{E_2} seien wie in Satz III. 2. 3. Dann sind folge Aussagen äquivalent:

(i) $P_{E_2} \geq P_{E_1}$

(ii) $E_2 \supseteq E_1$

(iii) $P_{E_2}P_{E_1} = P_{E_1}$

(iv) $P_{E_2} - P_{E_1}$ ist Projektion

(v) $\|P_{E_2}x\| \geq \|P_{E_1}x\| \ \forall x \in E$

Ist dies erfüllt, dann ist $P_{E_2} - P_{E-1}$ Projektion auf $E_2 \ominus E_1$.

Beweis: Übung. //

E_1 sei Unterraum von E_2. Sei $E_1 \oplus E_3 = E_2$ Riesz’sche Zerlegung. Dann schreiben wir $E_2 \ominus E_1 = E_3$.

Satz III. 2. 5. Seien P_{E_1}, P_{E_2} wie in Satz III. 2. 3. $P_{E_1}P_{E_2}$ ist Projektion $\Longleftrightarrow$ $P_{E_1}P_{E_2} = P_{E_2}P_{E_1}$.

Beweis: Auch hier ist der Beweis eine Übung. //

Seien E_i, $i \in I$ Unterräume des Hilbertraums E. $\bigvee_{i\in I} E_i$ sei der von allen E_i erzeugte Unterraum von E, d. h. $\bigvee_{i\in I} E_i = \overline{\mathrm{Lin}(E_i)}$. $\bigwedge_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I} E_i$ sei der größte Unterraum, der in allen E_i enthalten ist. Sei P der Projektionsoperator auf $\bigvee E_i$ und Q die Projektion auf $\bigwedge E_i$. Wir definieren $\bigvee_{i\in I} P_{E_i} = P$, $\bigwedge_{i\in I} P_{E_i} = Q$. Mit den Operatoren $\wedge$ und $\vee$ ist die Menge aller Projektionen von E ein Verband. Wenn $P_{E_1}P_{E_2} = P_{E_2}P_{E_1}$, dann $P_{E_1} \wedge P_{E_2} = P_{E_1}P_{E_2}$ und $P_{E_1} \vee P_{E_2} = P_{E_1} + P_{E_2} - P_{E_1}P_{E_2}$.

3. Konvergenzen von Elementen und Operatoren

a. Konvergenz von Elementen

Sei $(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, (x_n) eine Folge. Die Folge konvergiert ($x_n \to x$), wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Definition III. 3. 1 *(schwache Konvergenz).* x_n *konvergiert schwach* gegen x ($x_n \rightharpoonup x$), wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle \quad \forall y \in E$$ ♡

Eigenschaften:

(i) Aus $x_n \to x$ folgt $x_n \rightharpoonup x$, denn

$$|\langle x_n\,|\,y\rangle - \langle x\,|\,y\rangle| = |\langle x_n - x\,|\,y\rangle| \leq \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0$$

(ii) Wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup x'$, dann $x = x'$.

Beispiel III. 3. 1. Sei (x_n) ein Orthonormalsystem in E. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n\,|\,y\rangle|^2 \leq \|y\|^2 \qquad \text{(Bessel'sche Ungleichung)}$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \langle x_n\,|\,y\rangle = 0 = \langle 0\,|\,y\rangle$ $\forall y \in E$. Also $x_n \rightharpoonup 0$. Weil

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 = 2 \quad \text{für} \quad n \neq m$$

ist (x_n) nicht Cauchy'sch, konvergiert also nicht. ✓

Beispiel III. 3. 2. $\ell^2(\mathbb{N})$, $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \rightharpoonup (0, \ldots)$. ✓

Satz III. 3. 2. (i) Jede schwach konvergente Folge (x_n) ist normbeschränkt, d. h.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

(ii) Aus jeder beschränkten Folge in E kann man eine schwach konvergente Teilfolge auswählen. (E sei separabel).

Beweis: (i) Sei $f_n(y) = \langle y \mid x_n \rangle \quad \forall y \in E$. $f_n(y) = \langle y \mid x_n \rangle \to \langle y \mid x \rangle$, also ist (f_n) eine punktweise beschränkte Folge von Funktionen. Nach Satz II. 3. 1 (Banach-Steinhaus) ist (f_n) normbeschränkt (d. h. gleichmäßig beschränkt), also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$$

Es gilt $\|f_n\| = \|x_n\|$ nach Satz I. 4. 11. Also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

(ii) Siehe [1]. //

b. Konvergenz von Operatoren

Sei $T_n \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathcal{L}(E)$.

Definition III. 3. 3 *(gleichmäßige Konvergenz)*. Die Folge (T_n) *konvergiert gleichmäßig* (oder in Operatorennorm) gegen T, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Symbol: $T_n \rightrightarrows T$. ♡

Definition III. 3. 4 *(starke Konvergenz)*. Die Folge (T_n) *konvergiert stark* (in der starken Operatorentopologie) gegen T, wenn

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \quad \forall x \in E,$$

d. h. $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0 \ \forall x \in E$. Symbol: $T_n \to T$. ♡

Definition III. 3. 5 *(schwache Konvergenz)*. Die Folge (T_n) *konvergiert schwach* (in der schwachen Operatorentopologie) gegen T, wenn

$$T_n x \rightharpoonup Tx \quad \forall x \in E,$$

d. h. $\lim_{n\to\infty} \langle T_n x \mid y \rangle = \langle Tx \mid y \rangle \ \forall x, y \in E$. Symbol: $T_n \rightharpoonup T$. ♡

Bemerkung III. 3. 3.

$$T_n \rightrightarrows T \quad \Rightarrow \quad T_n \to T \quad \Rightarrow \quad T_n \rightharpoonup T$$

Satz III. 3. 6. (i) Jede schwach konvergente Folge (T_n) ist in der Operatorennorm beschränkt (d. h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$).

(ii) E sei separabel. Dann kann man aus jeder beschränkten Folge (T_n) von Operatoren aus $\mathcal{L}(E)$ eine schwach konvergente Teilfolge auswählen.

Beweis (Idee): (i) Satz II. 3. 1 (Banach-Steinhaus)

(ii) Siehe [1] //

4. Spektrum und Resolvente beschränkter linearer Operatoren im Hilbertraum

a. Definitionen

Im folgenden sei E ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(E)$.

Definition III. 4. 1 *(Resolvente)*. Eine komplexe Zahl λ gehört zur *Resolventenmenge* $\rho(T)$, wenn es einen auf ganz E definierten beschränkten linearen Operator $R_\lambda(T)$ gibt mit:

$$R_\lambda(T)(T - \lambda\,\mathrm{id}) = (T - \lambda\,\mathrm{id})R_\lambda(T) = \mathrm{id}\,.$$

$R_\lambda(T)$ ist dann durch λ und T eindeutig bestimmt und heißt *Resolvente* von T. ♡

Definition III. 4. 2 *(Spektrum)*. Die Menge $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt *Spektrum* von T und wird mit $\sigma(T)$ bezeichnet. ♡

Bemerkung III. 4. 1. (i) Betrachte $Tx - \lambda x = y$ in E. (z. B. $(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)\,ds$, dann ist $Tx - \lambda x = y$ Integralgleichung).

Gibt es zu jedem $y \in E$ eine Lösung? Ist die Lösung eindeutig? Hängt die Lösung stetig von y ab?

Existenz heißt: $\forall y \exists x :\ (T - \lambda\,\mathrm{id})x = y$, also $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ surjektiv. Eindeutigkeit heißt: $(T - \lambda\,\mathrm{id})x = (T - \lambda\,\mathrm{id})x' \ \Rightarrow\ x = x'$: $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ ist injektiv. Dann ist $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ existent und ist auf ganz E definiert: $(T - \lambda\,\mathrm{id})x = y \ \Rightarrow\ x = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}y$. Daß die Lösung stetig von y abhängt, heißt, daß $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ stetig. D. h. $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ muß existieren und stetig sein.

$$R_\lambda(T)(T - \lambda\,\mathrm{id}) = (T - \lambda\,\mathrm{id})R_\lambda(T) = \mathrm{id}$$

heißt $R_\lambda(T) = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$. Die drei Bedingungen sind erfüllt genau dann, wenn $\lambda \in \rho(T)$. Die Lösung der Gleichung $Tx - \lambda x = y$ ist durch $x = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}y$ gegeben für $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ sei bijektive Abbildung von E auf E. Da $T \in \mathcal{L}(E)$, ist auch $(T - \lambda\,\mathrm{id}) \in \mathcal{L}(E)$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung (Satz II. 4. 1) ist $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ auch stetig, also $\lambda \in \rho(T)$ und $(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = R_\lambda(T)$.

Definition III. 4. 3 *(Eigenwert, Eigenelemente)*. Wenn

$$\ker(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \{\, x \in E \mid (T - \lambda\,\mathrm{id})x = 0 \,\} \neq \{0\},$$

heißt λ *Eigenwert* von T und die von Null verschiedenen Elemente von $\ker(T - \lambda\,\mathrm{id})$ heißen *Eigenelemente* zum Eigenwert λ. Die Menge der Eigenwerte von T bezeichnen wir mit $\sigma_p(T)$. ♡

Bemerkung III. 4. 2. $\sigma_p(T)$ heißt das Punktspektrum: für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ nicht injektiv, denn $(T - \lambda\,\mathrm{id})x = 0 = (T - \lambda\,\mathrm{id})0$, also $\lambda \in \sigma(T)$.

Definition III. 4. 4 *(Punktspektrum, stetiges Spektrum, Restspektrum)*.

$\sigma_p(T) := \{ \lambda \mid (T - \lambda \,\mathrm{id})$ ist nicht injektiv $\}$ heißt *Punktspektrum*

$\sigma_c(T) := \{ \lambda \mid (T - \lambda \,\mathrm{id})$ ist injektiv, nicht surjektiv, hat dichtes Bild $\}$ heißt *stetiges Spektrum*

$\sigma_r(T) := \{ \lambda \mid (T - \lambda \,\mathrm{id})$ ist injektiv, Bild nicht dicht $\}$ heißt *Restspektrum* ♡

Beispiele III. 4. 3. (i) Sei $E = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{A}$ (n,n)-Matrix. $T_{\mathfrak{A}}(x) = \mathfrak{A} \cdot x$, wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. Jeder lineare Operator von E in E ist von dieser Form. $T_{\mathfrak{A}}$ ist stetig.

$$(T_{\mathfrak{A}} - \lambda \,\mathrm{id})x = T_{\mathfrak{A}-\lambda I} x$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathfrak{A} - \lambda I) = 0 &\iff (\mathfrak{A} - \lambda I) \quad \text{ist nicht injektiv} \\ &\iff (\mathfrak{A} - \lambda I) \quad \text{weder injektiv noch surjektiv} \\ &\iff \lambda \quad \text{ist Eigenwert von } \mathfrak{A} \\ &\iff \lambda \quad \text{ist Eigenwert von } T_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

$\sigma(T_{\mathfrak{A}}) = \sigma_p(T_{\mathfrak{A}})$ ist die Menge der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, und diese sind unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

(ii) Multiplikationsoperator: $(Tf)(t) = t \cdot f(t)$, $f \in L^2[0,1]$ mit Lebesgue-Maß.

Behauptung: $\sigma_p(T) = \emptyset$

Beweis: Angenommen, $\lambda \in \sigma_p(T)$. Dann $\exists f \neq 0$ mit $(T - \lambda \,\mathrm{id})f = 0$, also $Tf = \lambda f$.

$$(t - \lambda) f(t) = 0.$$

Für $t - \lambda \neq 0$ ist also $f(t) = 0$. $f(t) = \begin{cases} c & \lambda = t,\ \lambda \in [0,1] \\ 0 & \lambda \neq t \end{cases}$. Da das Lebesgue-Maß einpunktiger Mengen 0 ist, ist $f(t) = 0$ μ-fastüberall, also $f = 0$ in $L^2[0,1]$ im Widerspruch zur Annahme. /

Behauptung: $\sigma(T) = [0,1]$

Beweis: Sei $\lambda \notin [0,1]$. Die Funktion $\frac{1}{t-\lambda}$ ist auf $[0,1]$ stetig und damit beschränkt, also ist $(Bf)(t) = \frac{1}{t-\lambda} f(t)$ in $\mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} (B(T - \lambda \,\mathrm{id})f)(t) &= \frac{1}{\cancel{t - \lambda}} \cancel{(t - \lambda)} f(t) = f(t) \\ ((T - \lambda \,\mathrm{id})Bf)(t) &= \cancel{(t - \lambda)} \frac{1}{\cancel{t - \lambda}} f(t) = f(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\lambda \in \rho(T)$ und $B = R_\lambda(T)$. Sei $\lambda \in [0,1]$. Angenommen $\lambda \in \rho(T)$. Dann existiert $R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(E)$ mit

$$R_\lambda(T)(T - \lambda \,\mathrm{id})f = (T - \lambda \,\mathrm{id})R_\lambda(T) f = f \qquad \forall f \in L^2[0,1].$$

$\|f\| = \|R_\lambda(T)(T - \lambda \,\mathrm{id})f\| \leq \|R_\lambda(T)\| \, \|(t - \lambda)f\|$. Sei $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \in \,]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann haben wir:

$$\cancel{\|f_\varepsilon\|} \leq \|R_\lambda(T)\| \, \varepsilon \cancel{\|f_\varepsilon\|},$$

also $1 \leq \|R_\lambda(T)\| \, \varepsilon$ Widerspruch, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war. Also: $\lambda \notin \rho(T)$. /

b. Eigenschaften des Spektrums

Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ und E Hilbertraum.

Lemma III. 4. 5. (i) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$, $\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}$

(ii) Zwei Resolventenidentitäten:

(1) $R_\lambda(T) - R_{\lambda'}(T) = (\lambda - \lambda')R_\lambda(T)R_{\lambda'}(T) = (\lambda - \lambda')R_{\lambda'}(T)R_\lambda(T)$.

(2) $R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T)R_\lambda(S)$ für $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$, $T, S \in \mathcal{L}(E)$

Beweis: (i) Übung

(ii) (1)

$$\begin{aligned}(T - \lambda\,\mathrm{id})(R_{\lambda'}(T) + (\lambda - \lambda')R_\lambda(T)R_{\lambda'}(T)) &= (T - \lambda\,\mathrm{id})R_{\lambda'}(T) + (\lambda - \lambda')R_{\lambda'}(T)\\ &= (T - \cancel{\lambda\,\mathrm{id}} + \cancel{\lambda\,\mathrm{id}} - \lambda'\,\mathrm{id})R_{\lambda'}(T)\\ &= (T - \lambda'\,\mathrm{id})R_{\lambda'}(T) = \mathrm{id}\end{aligned}$$

Analog macht man das von rechts, damit $R_{\lambda'}(T) + (\lambda - \lambda')R_\lambda(T)R_{\lambda'}(T) = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = R_\lambda(T)$

(2) Übung //

Satz III. 4. 6. (i) $\rho(T)$ ist offen und $\sigma(T)$ ist abgeschlossen.

(ii) Wenn $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^{-1}$, dann gilt

$$\lambda \in \rho(T) \quad \text{und} \quad R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n-1}$$

(iii) Wenn $|\lambda| > \|T\|$, dann

$$\lambda \in \rho(T) \quad \text{und} \quad R_\lambda(T) = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n.$$

Beweis: (ii)⇒(i) ist klar.

(ii): Für $|\lambda - \lambda_0| < \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned}\left\|(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}\right\| &\le |\lambda - \lambda_0|^n \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^{n+1}\\ &= \underbrace{\left(|\lambda - \lambda_0|\left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|\right)^n}_{=:q,\ 0\le q<1}\left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|\end{aligned}$$

⇒ Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$ konvergiert in der Operatornorm und definiert daher einen Operator $B \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned}(T - \lambda\,\mathrm{id})B &= (T - \lambda_0\,\mathrm{id})B + (\lambda_0 - \lambda)B\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n\underbrace{(T - \lambda_0\,\mathrm{id})R_{\lambda_0}(T)^{n+1}}_{R_{\lambda_0}(T)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_0)^n}_{-(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}R_{\lambda_0}(T)^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^{n+1}R_{\lambda_0}(T)^{n+1}\\ &= (\lambda - \lambda_0)^0 R_{\lambda_0}^0 = \mathrm{id}\end{aligned}$$

Analog: $B(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{id} \;\Rightarrow\; B = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = R_\lambda(T), \quad \lambda \in \rho(T)$
(iii): Da $|\lambda| > \|T\|$, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} -\lambda^{-n-1}T^n =: c$.

$$\begin{aligned}(T - \lambda\,\mathrm{id})c = Tc - \lambda c &= \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda^{-n-1}T^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda^{-n})T^n \\ &= \lambda^0 T^0 = \mathrm{id}\end{aligned}$$

Analog $c(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{id} \;\Rightarrow\; \lambda \in \rho(T)$ und $c = R_\lambda(T)$. //

Lemma III. 4. 7 *(Neumann'sche Reihe)*. Sei E Banachraum und $T \in \mathcal{L}(E)$. Sei $\|T\| < 1$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei $T^0 = \mathrm{id}$, in der Operatorennorm und $(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. (vergl. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$).

Beweis: $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, also konvergiert die Reihe

$$(\mathrm{id} - T)\sum_{n=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = T^0 = \mathrm{id}$$

Analog für $\sum_{n=0}^{\infty} T^n(\mathrm{id} - T) = \mathrm{id}$. //

Aus dem Lemma über die Neumann'sche Reihe folgt:

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = \lambda^{-1}(T\lambda^{-1} - \mathrm{id})^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathrm{id} - T\lambda^{-1})^{-1}$$

weil $|\lambda| > \|T\|$, $\left\|T\lambda^{-1}\right\| < 1$, also existiert $(\mathrm{id} - T\lambda^{-1})$ und es ist dann

$$(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

und damit

$$-\lambda^{-1}(\mathrm{id} - T\lambda^{-1})^{-1} = R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda^{-n-1}T^n.$$

Definition III. 4. 8 *(Spektralradius)*. $r(T) := \sup\{\, |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \,\}$ heißt *Spektralradius* von T. Es ist dies der kleinste Radius eines Kreises um 0, der das Spektrum $\sigma(T)$ enthält. ♡

Satz III. 4. 9. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $\sigma(T) \neq \emptyset$

(ii) $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

Beweis: (i)

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda\,\mathrm{id})(x)\| &= \|\lambda x - Tx\| \geq \|\lambda x\| - \|Tx\| \\ &\geq |\lambda|\,\|x\| - \|T\|\,\|x\| \geq (|\lambda| - \|T\|)\,\|x\|\end{aligned}$$

für $|\lambda| - \|T\| > 0$. Wir setzen $x := R_\lambda(T)u$:

$$\Big\|\underbrace{(T-\lambda\,\mathrm{id})R_\lambda(T)}_{=\mathrm{id}}\,u\Big\| = \|u\| \geq (|\lambda| - \|T\|)\,\|R_\lambda(T)u\|$$

Man hat:

$$\|R_\lambda(T)u\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}\,\|u\|\,,$$

also

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \quad \text{für } |\lambda| > \|T\| \tag{$*$}$$

Nach Satz III. 4. 6 (iii) ist $\langle R_\lambda(T)x\,|\,y\rangle$ eine holomorphe Funktion auf $\rho(T)$. Angenommen, $\sigma(T)$ sei leer, dann ist $\langle R_\lambda(T)x\,|\,y\rangle$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Wegen ($*$) gilt:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \langle R_\lambda(T)x\,|\,y\rangle = 0.$$

Nach dem Satz von Liouville ist jede beschränkte holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ konstant, d. h. $\langle R_\lambda(T)x\,|\,y\rangle = c_{xy}$.

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} c_{xy} = 0$$

also

$$\langle R_\lambda(T)x\,|\,y\rangle = 0 \quad \forall x,y \in E.$$

Setze $y = R_\lambda(T)x$ dann folgt $R_\lambda(T)x = 0 \quad \forall x$, also $R_\lambda(T) = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, $\sigma(T) = \emptyset$. Also $\sigma(T) \neq \emptyset$.

(ii) folgt ähnlich wie der Satz über Potenzreihen (Konvergenzradius). //

Bemerkung III. 4. 4. (i) Satz III. 4. 6: $R_\lambda(T)$ ist auf ganz $\rho(T)$ eine holomorphe Funktion in λ mit beschränkten Operatoren als Koeffizienten. Also ist für jedes $x,y \in E$ $\langle R_\lambda(T)x\,|\,y\rangle$ eine holomorphe Funktion auf $\rho(T)$.

(ii) $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$:

$$\big\|T^n\big\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|T\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|T\|$$

also: $r(T) \leq \|T\|$. Spezieller: für $T \in \mathcal{L}(E)$ normal gilt sogar $r(T) = \|T\|$.

Beispiel III. 4. 5 (Volterra'scher Integraloperator). $E = L^2\,[0,1]$ mit L-Maß.

$$K(\cdot,\cdot) \in C([0,1]\times[0,1])$$

Wir definieren:

$$T_K f(x) := \int_0^x K(x,t)f(t)\,dt \quad f \in L^2\,[0,1]$$

T_K heißt ein VOLTERRA'scher Integraloperator. Z. B. für $K = 1$ ist

$$T_K f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Man kann zeigen:

$$r(T_K) = 0, \quad \text{also} \quad \sigma(T_K) = \{0\}$$

Weil $\|T_K\| \neq 0$ für $K \neq 0$ ist $r(T_K) < \|T_K\|$. ✓

c. Spektrum selbstadjungierter Operatoren

Satz III. 4. 10. Sei $T = T^* \in \mathcal{L}(E)$, E Hilbertraum. Eine Zahl λ gehört zur Resolventenmenge $\rho(T)$

$$\iff \quad \exists c_\lambda > 0 \text{ mit } \|(T - \lambda\,\mathrm{id})x\| \geq c_\lambda \|x\| \quad \forall x \in E \tag{†}$$

Beweis: „⇒": Sei $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow\ (T - \lambda\,\mathrm{id})R_\lambda(T)x = x = R_\lambda(T)(T - \lambda\,\mathrm{id})x$

$$\|x\| \leq \|R_\lambda(T)\|\,\|(T - \lambda\,\mathrm{id})x\|$$

$$\Rightarrow\ \|(T - \lambda\,\mathrm{id})x\| \geq \underbrace{\frac{1}{\|R_\lambda(T)\|}}_{=:c_\lambda} \|x\|$$

„⇐": Sei $\|(T - \lambda\,\mathrm{id})x\| \geq c_\lambda \|x\| \quad \forall x \in E$.

Behauptung: $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ ist injektiv.

Beweis: Sei $(T - \lambda\,\mathrm{id})x_1 = (T - \lambda\,\mathrm{id})x_2$, dann

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda\,\mathrm{id})(x_1 - x_2)\| &= 0 \geq c_\lambda \|x_1 - x_2\| \geq 0 \\ \Rightarrow \quad \|x_1 - x_2\| = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

/

Behauptung: $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ ist abgeschlossen.

Beweis: Sei $y_n = (T - \lambda\,\mathrm{id})x_n$ mit $x_n \in E,\ n \in \mathbb{N}$. $y_n \to y$ in E.

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \|(T - \lambda\,\mathrm{id})(x_n - x_m)\| \\ &\geq c_\lambda \|x_n - x_m\| \qquad \text{mit (†)} \\ \Rightarrow \quad \|x_n - x_m\| &\leq c_\lambda^{-1} \|y_n - y_m\| \end{aligned}$$

Da y_n konvergiert, ist y_k eine Cauchyfolge. Also ist auch x_n eine Cauchyfolge. Damit, da E vollständig, gibt es $x \in E$ mit $x_n \to x$. Da $(T - \lambda\,\mathrm{id}) \in \mathcal{L}(E)$ folgt:

$$\begin{aligned} &y_m = (T - \lambda\,\mathrm{id})x_m \to (T - \lambda\,\mathrm{id})x \\ &y_m \to y. \end{aligned}$$

Also: $(T - \lambda\,\mathrm{id})x = y\ \Rightarrow\ y \in (T - \lambda\,\mathrm{id})(E)$ /

Behauptung: $(T - \lambda\,\mathrm{id})(E) = E$

Beweis: Angenommen, es wäre $(T - \lambda\,\mathrm{id})(E) \neq E$. Nach der letzten Behauptung ist $E_1 := (T - \lambda\,\mathrm{id})(E)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von E. Nach dem 1. Satz von Riesz (Satz I. 4. 7) gilt:

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$$

Da $E_1 \neq E$ $\exists\, u \in E_1^{\perp}$, $u \neq 0$.

$$\begin{aligned} & 0 = \langle u \,|\, (T - \lambda\,\mathrm{id})x \rangle \quad \forall x \in E \\ \Rightarrow \quad & \langle u \,|\, Tx \rangle = \langle u \,|\, \lambda x \rangle = \overline{\lambda} \langle u \,|\, x \rangle \\ \Rightarrow \quad & \langle Tu \,|\, x \rangle = \overline{\lambda} \langle u \,|\, x \rangle \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} & \left\langle (T - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})u \,|\, x \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Tu = \overline{\lambda} u \\ \Rightarrow \quad & \langle Tu \,|\, u \rangle = \left\langle \overline{\lambda} u \,|\, u \right\rangle = \langle u \,|\, Tu \rangle = \left\langle u \,|\, \overline{\lambda} u \right\rangle \\ \Rightarrow \quad & \langle Tu \,|\, u \rangle = \left\langle \overline{\lambda} u \,|\, u \right\rangle = \langle u \,|\, Tu \rangle = \left\langle u \,|\, \overline{\lambda} u \right\rangle \\ & = \overline{\lambda}\, \|u\|^2 = \lambda\, \|u\|^2 \\ \Rightarrow \quad & \lambda = \overline{\lambda} \\ \Rightarrow \quad & Tu = \lambda u \\ \Rightarrow \quad & \|(T - \lambda\,\mathrm{id})u\| = 0 \geq \underbrace{c_\lambda}_{>0} \underbrace{\|u\|}_{>0} \geq 0 \quad \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Also ist $(T - \lambda\,\mathrm{id})(E) = E$, also surjektiv. Also: $\lambda \in \rho(T)$. /

Bemerkung III. 4. 6. Für $T \in \mathcal{L}(E)$ gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |\langle Tx \,|\, y \rangle|$$

(vergl. $\|z\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle y \,|\, z \rangle|$, Cauchy-Schwarz).

Für selbstadjungierte Operatoren gilt:

Satz III. 4. 11.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx \,|\, x \rangle| \quad \forall T = T^* \in \mathcal{L}(E)$$

Beweis: Sei $c = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx \,|\, x \rangle|$. Es gilt $c \leq \|T\|$. Zu zeigen: $\|T\| \leq c$.
Für beliebiges $x \in E$ gilt:

$$|\langle Tx \,|\, x \rangle| \leq c\, \|x\| \tag{♮}$$

Für $x \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx \,|\, Tx \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\langle T(\alpha x + \alpha^{-1} Tx) \,|\, \alpha x + \alpha^{-1} Tx \right\rangle - \left\langle T(\alpha x - \alpha^{-1} Tx) \,|\, \alpha x - \alpha^{-1} Tx \right\rangle \right) \quad \forall \alpha > 0 \\ \|Tx\|^2 &\leq \frac{1}{4} c \left(\left\| \alpha x + \alpha^{-1} Tx \right\|^2 + \left\| \alpha x - \alpha^{-1} Tx \right\| \right) \quad \text{nach (♮)} \\ &= \frac{c}{4} \left(2\, \|\alpha x\|^2 + 2 \left\| \alpha^{-1} Tx \right\|^2 \right) \quad \text{Parallelogrammid.} \\ &= \frac{c}{2} \left(\alpha^2\, \|x\|^2 + \alpha^{-2}\, \|Tx\|^2 \right) \end{aligned}$$

Setze $\alpha^2 = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ falls $Tx \neq 0$ ist.

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &\leq \frac{c}{2}(\|Tx\|\,\|x\| + \|x\|\,\|Tx\|)\\ &= c\,\|Tx\|\,\|x\| \qquad \forall Tx \neq 0\end{aligned}$$

Für $Tx = 0$ gilt die auch trivialerweise und damit folgt: $\|Tx\| \leq c\,\|x\|$, also

$$\|T\| \leq c$$ //

Definition III. 4. 12 *(untere Grenze, obere Grenze)*. Für einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ ist

$$\begin{aligned} m_T &:= \inf_{\|x\|=1} \langle Tx\,|\,x\rangle && \text{die } \textit{untere Grenze} \text{ von } T\\ M_T &:= \sup_{\|x\|=1} \langle Tx\,|\,x\rangle && \text{die } \textit{obere Grenze} \text{ von } T.\end{aligned}$$ ♡

Aus den Charakterisierungen folgt

$$m_T\,\langle x\,|\,x\rangle \leq \langle Tx\,|\,x\rangle \leq M_T\,\langle x\,|\,x\rangle$$

Aus Satz III. 4. 11 folgt:

$$\|T\| = \max(|m_T|\,, M_T).$$

Satz III. 4. 13. Für $T = T^* \in \mathcal{L}(E)$, E Hilbertraum, gilt

$$\sigma(T) \subseteq [m_T, M_T]\,.$$

Beweis: Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_0 \notin [m_T, M_T]$. Zu zeigen: $\lambda_0 \in \rho(T)$. Sei

$$c := \inf\{\,|\lambda - \lambda_0| \;\mid\; \lambda \in [m_T, M_T]\,\}\,.$$

Dann ist $c > 0$.

$$\|x\|\,\|(T - \lambda_0\,\mathrm{id})x\| \geq |\langle (T - \lambda_0\,\mathrm{id})x\,|\,x\rangle| = |\langle Tx\,|\,x\rangle - \lambda_0\,\langle x\,|\,x\rangle|\,.$$

Sei $\|x\| = 1$:

$$\|(T - \lambda_0\,\mathrm{id})x\| \geq |\underbrace{\langle Tx\,|\,x\rangle}_{\in[m_T, M_T]} - \lambda_0| \geq c$$

$\Rightarrow \|(T - \lambda_0\,\mathrm{id})x\| \geq c\,\|x\|\;\; \forall x \in E$. Nach Satz III. 4. 10 ist $\lambda_0 \in \rho(T)$. //

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}&\sigma(T) \subseteq [-\|T\|\,, \|T\|]\,,\\ &\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}\end{aligned}$$

Satz III. 4. 13 ist „scharf“, denn beide Genzen werden approximiert oder sind dabei.

Beispiel III. 4. 7. $E = L^2[a,b]$ mit L-Maß, $a < b \in \mathbb{R}$. Für $f \in C[a,b]$ sei $T_f\varphi = f \cdot \varphi\ \forall \varphi \in E$. Wenn f reellwertig, dann ist $T_f = (T_f)^*$ und $\left\|T_f\right\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

$$T_{f_1} \leq T_{f_2} \quad\iff\quad f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Seien

$$m_f := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ und } M_f := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Dann haben wir

$$\left\langle T_f\varphi \,|\, \varphi\right\rangle = \int_a^b f(x)\,|\varphi(x)|^2\, dx \leq M_f \int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx = M_f \langle \varphi \,|\, \varphi\rangle$$

Analog: $m_f \langle \varphi \,|\, \varphi\rangle \leq \left\langle T_f\varphi \,|\, \varphi\right\rangle$. Man zeigt leicht: $m_f = m_{T_f}$, $M_f = M_{T_f}$.

$$\sigma(T_f) \subseteq \left[m_f, M_f\right].$$

✓

Satz III. 4. 14. Sei $T = T^* \in \mathcal{L}(E)$.

(i) Alle Eigenwerte von T sind reell.

(ii) Zu verschiedenen Eigenwerten gehörende Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: (i) Folgt aus Satz III. 4. 13.

(ii) Sei $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, $\lambda \neq \mu$. Zu zeigen: $\langle x \,|\, y\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda \langle x \,|\, y\rangle &= \langle \lambda x \,|\, y\rangle \\ &= \langle Tx \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, Ty\rangle \\ &= \langle x \,|\, \mu y\rangle = \mu \langle x \,|\, y\rangle \qquad \text{da } \mu \text{ reell} \\ \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\langle x \,|\, y\rangle &= 0 \\ \Rightarrow \quad \langle x \,|\, y\rangle &= 0. \end{aligned}$$

//

d. Monotone selbstadjungierte Operatoren

Lemma III. 4. 15. Sei $T = T^* \in \mathcal{L}(E)$ und $T \geq 0$ (d. h. $\langle Tx \,|\, x\rangle \geq 0\ \forall x \in E$). Dann gilt

$$|\langle Tx \,|\, y\rangle|^2 \leq \langle Tx \,|\, x\rangle \langle Ty \,|\, y\rangle. \tag{$\flat$}$$

Beweis: Wir definieren $(x \,|\, y) := \langle Tx \,|\, y\rangle\ \forall x, y \forall E$. $(\cdot \,|\, \cdot)$ ist eine nichtnegative Sesquilinearform auf E. Für $(\cdot \,|\, \cdot)$ gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$|(x \,|\, y)|^2 \leq (x \,|\, x)(y \,|\, y),$$

denn durch Einsetzen der Definition haben wir

$$|\langle Tx \,|\, y\rangle|^2 \leq \langle Tx \,|\, x\rangle \langle Ty \,|\, y\rangle.$$

//

Bemerkung III. 4. 8. Für $T = \mathrm{id}$ ist ($\flat$) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Hilbertraum E.

Satz III. 4. 16. Sei E ein Hilbertraum. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine monoton wachsende (d. h. $\langle A_x \,|\, x\rangle \leq \langle A_m x \,|\, x\rangle \;\forall x \in E \forall m \geq n$) und nach oben beschränkte (d. h. $\exists B = B^* \in \mathcal{L}(E)$ mit $A_n \leq B \;\forall n \in \mathbb{N}$) Folge selbstadjungierter Operatoren auf E.

Dann existiert ein selbstadjungierter, beschränkter Operator A auf E mit

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \quad x \in E,$$

d. h. A_n konvergiert stark gegen A, $A_n \to A$.

Beweis: Sei $c := \|B\|$. O. B. d. A. sei $A_n \geq 0$.

$$\|A_n\| \leq M_{A_n} \leq M_B = \|B\|$$

Sei $T = A_n - A_m$ für $n \geq m \;\Rightarrow\; T \geq 0$. Nach Lemma III. 4. 15 gilt:

$$\begin{aligned}
&|\langle Tx \,|\, y\rangle|^2 \leq \langle Tx \,|\, x\rangle \langle Ty \,|\, y\rangle \\
\iff\; &|\langle (A_n - A_m)x \,|\, y\rangle|^2 \leq \langle (A_n - A_m)x \,|\, x\rangle \langle (A_n - A_m)y \,|\, y\rangle \\
\iff\; &\|(A_n - A_m)x\|^4 \leq \langle (A_n - A_m)x \,|\, x\rangle \underbrace{\langle (A_n - A_m)(A_n - A_m)x \,|\, (A_n - A_m)x\rangle}_{\leq 2c\|(A_n - A_m)x\|^2} \\
&\text{mit } y := (A_n - A_m)x \\
\Rightarrow\; &\|(A_n - A_m)x\|^2 \leq 2c\,\langle (A_n - A_m)x \,|\, x\rangle = 2c(\langle A_n x \,|\, x\rangle - \langle A_m x \,|\, x\rangle)
\end{aligned}$$

Die Folge $(\langle A_n x \,|\, x\rangle)_n$ konvergiert, ist also eine Cauchyfolge von Zahlen. Also ist (A_n) eine Cauchyfolge. Sei $y = \lim_{n\to\infty} A_n x$. Wir definieren $Ax := y$. Aus $\langle A_n x \,|\, x'\rangle = \langle x \,|\, A_n x'\rangle$ folgt für $n \to \infty$:

$$\langle Ax \,|\, x'\rangle = \langle x \,|\, Ax'\rangle \quad \forall x, x' \in E.$$

$\|A_n x\| \leq c\,\|x\| \;\Rightarrow\; \|Ax\| \leq c\,\|x\|$, also ist A beschränkt und selbstadjungiert, nach Definition ist $Ax = \lim A_n x \;\forall x \in E$. //

5. Kompakte Operatoren im Banachraum

a. Kompakte und vollstetige Operatoren

Wir rufen uns einige Eigenschaften von Teilmengen metrischer Räume in Erinnerung: Sei E ein metrischer Raum, $M \subseteq E$. M heißt *relativkompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus M eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in E besitzt. M heißt *kompakt*, wenn es eine solche konvergente Teilfolge gibt, so daß der Limes in M liegt. Wir können zeigen: M ist kompakt $\iff$ M relativkompakt und abgeschlossen.

Beispiel III. 5. 1. (i) $E \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$. M ist relativkompakt $\iff$ M beschränkt. M ist kompakt $\iff$ M relativkompakt und abgeschlossen.

(ii) E sei Hilbertraum und nicht endlichdimensional. $U = \{\, x \in E \mid \|x\| \leq 1 \,\}$ Einheitskugel in E. U ist nicht relativkompakt:

Beweis: Wähle Orthonormalsystem $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. $x_n \in U$, aber

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 = 2,$$

also $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}\ \forall n \neq m$. (x_n) besitzt keine konvergente Teilfolge. /

Seien im folgenden E und F Banachräume.

Definition III. 5. 1 *(kompakt)*. Ein linearer Operator $T\colon E \to F$ heißt *kompakt* $\iff$ T bildet jede beschränkte Teilmenge $M \subseteq E$ in eine relativkompakte Teilmenge $T(M) \subseteq F$ ab. ♡

Definition III. 5. 2 *(vollstetig)*. Ein linearer Operator $T\colon E \to F$ heißt *vollstetig*, wenn T jede schwach konvergierende Folge (x_n) aus E (d. h. $\exists x \in E : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)\ \forall f \in E'$) in eine stark konvergierende Folge $(Tx_n n)$ aus F (d. h. $\exists y \in F : \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - y\| = 0$) abbildet. ♡

Bemerkung III. 5. 2.

(i) Jeder kompakte Operator ist beschränkt, denn jede relativkompakte Menge ist beschränkt.

(ii) Jeder vollstetige Operator ist beschränkt.

(iii) $E = F = \ell^2(\mathbb{N})$: id ist weder kompakt noch vollstetig, aber beschränkt, denn $\mathrm{id}(U)$ (Einheitskugel) ist nicht relativkompakt, aber beschränkt. Sei (x_n) ein Orthonormalsystem. Dann $x_n \rightharpoonup 0$, aber $\mathrm{id}\, x_n = x_n$ konvergiert nicht.

(iv) Wenn T kompakt ist, ist T vollstetig. (nicht ganz leicht zu sehen)

(v) $E = F = \ell^1(\mathbb{N})$, $T = \mathrm{id}$ ist nicht kompakt, aber vollstetig.

Beispiel III. 5. 3. Sei $E = C^1[0,1]$, $\|f\|_1 := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. $F = C[0,1]$, $\|f\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. $T(f) := f$. Dann ist T kompakt.

Beweis: Für $f \in E$ gilt:

$$\left|f(x) - f(x')\right| = \left|\int_{x'}^{x} f'(t)\,dt\right| \le \|f\|_1 \left|\int_{x'}^{x} 1\,dt\right| = \|f\|_1 \left|x - x'\right| \tag{5.1}$$

$$\|T(f)\|_2 = \|f\|_2 \le \|f\|_1 \tag{5.2}$$

M sei beschränkt in $(E, \|\cdot\|_1)$. Sei $c := \sup_{f\in M} \|f\|_1$. Nach (5.1) und (5.2) gilt

$$\left|f(x) - f(x')\right| \le c\left|x - x'\right|,$$

d. h. M gleichgradig stetig. $\|f\|_2 = \|Tf\|_2 \le c$, d. h. M ist beschränkt in F. $T(M) = M$ erfüllt die Voraussetzungen von Arzela-Ascoli. Jede Folge aus $T(M)$ besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, also eine in F konvergente Teilfolge. /

Bemerkung III. 5. 4 (Sobolev'sche Einbettungssätze).

$$H_0^{k'}(\Omega) \to H_0^{k}(\Omega), \quad k < k' \quad \text{ist kompakt}$$
$$H^{k+1}(\Omega) \to H^{k}(\Omega) \quad \text{ist kompakt, falls } \partial\Omega \text{ ein } C^1\text{-Rand}$$

$\mathcal{K}(E,F)$ ist die Menge aller kompakten Operatoren des Banachraums E in den Banachraum F. $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E,E)$.

Lemma III. 5. 3. Sei $T \in L(E,F)$, T vollstetig. dann ist T stetig.

Beweis: Sei $x_n \to x$. Dann gilt auch $x_n \rightharpoonup x$. Da T vollstetig existiert $y \in F$ mit $Tx_n \to y$. Sei $f \in F'$, dann $f \circ T \in E'$. $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; f(Tx_n) \to f(Tx)\; \forall f \in F'$, also $Tx_n \rightharpoonup T_x$. Mit $Tx_n \to y$ folgt $f(y) = f(Tx)\; \forall f \in F'$, also $y = Tx$. //

Satz III. 5. 4. Wenn T kompakt ist, dann ist T vollstetig.

Beweis: Angenommen, T sei nicht vollstetig. Sei $x_n \rightharpoonup x$, $x_n, x \in E$ und $Tx_n \not\to Tx$, also $\exists \varepsilon > 0\; \forall N\; \exists n > N$ mit $\|Tx_n - Tx\| > \varepsilon$. Also existiert Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und $\varepsilon > 0$ so daß

$$\left\|Tx_{n_k} - Tx\right\| > \varepsilon$$

Mit Banach-Steinhaus: jede schwach konvergente Folge ist beschränkt, oBdA $\left\|x_{n_k}\right\| \le 1\; \forall k$. T ist kompakt, also ist $\overline{Tx_{n_k}}$ kompakt, da in $\overline{T(B_1(0))}$ enthalten. Also konvergiert oBdA Tx_{n_k}. //

Satz III. 5. 5. (i) $\mathcal{K}(E,F)$ ist ein Unterraum des Banachraums $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$.

(ii) Aus $B \in \mathcal{L}(E_1,E),\; A \in \mathcal{L}(F,F_1),\; T \in \mathcal{K}(E,F)$ mit E_1, F_1, E, F Banachräumen folgt

$$ATB \in \mathcal{K}(E_1,F_1)$$

Der Beweis ist eine Übung.

Bemerkung III. 5. 5. Sei $E = E_1 = F = F_1$ Banachraum, (ii) besagt dann: mit $A, B \in \mathcal{L}(E)$ und $T \in \mathcal{K}(E)$ folgt $ATB \in \mathcal{K}(E)$. D. h. $\mathcal{K}(E)$ ist ein Ideal in der Algebra $\mathcal{L}(E)$.

Bemerkung III. 5. 6. Wenn $T \in \mathcal{L}(E,F)$ und $\dim T(E) < \infty$, dann ist T kompakt.

Beweis: $T(M)$ beschränkt: M in E ist beschränkt in F und insbesondere in $F_1 = T(E)$. Also ist $T(M)$ relativ kompakt im endlich dimensionalen Banachraum F_1. //

$\mathcal{F}(E,F) = \{T \in \mathcal{L}(E,F),\; \dim T(E) < \infty\}$ ist der Vektorraum aller stetigen linearen Operatoren mit endlichem Wertebereich. $\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F)$.

Nach Satz III. 5. 5 (i) folgt $\overline{\mathcal{F}(E,F)} \subseteq \mathcal{K}(E,F)$. $\overline{\mathcal{F}(E,F)} = \{T \in \mathcal{L}(E,F),\; \exists (T_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0\}$. Im allgemeinen gilt wirklich

$$\overline{\mathcal{F}(E,F)} \subset \mathcal{K}(E,F).$$

Für E und F Hilberträume gilt allerdings

$$\overline{\mathcal{F}(E,F)} = \mathcal{K}(E,F).$$

Wenn E, F Hilberträume sind, dann ist $T \in L(E,F)$ kompakt $\iff$ T vollstetig.

Definition III. 5. 6 *(transponierter Operator)*. Seien E, F Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Wir definieren

$$T^t(f')(e) = f'(T(e)) \quad e \in E,\ f' \in F'$$

$e \mapsto f'(Te)$ ist ein lineares Funktional auf E. Es gilt

$$\left|f'Te\right| \leq \left\|f'\right\| \|Te\| \leq \left\|f'\right\| \|T\| \|e\|,$$

d. h. das Funktional ist stetig: $T^t(f') \in E'$,

$$\left\|T^t(f')\right\| \leq \left\|f'\right\| \|T\| = \|T\| \left\|f'\right\|$$

$\Rightarrow$ $T^t \in \mathcal{L}(F', E')$ mit $\left\|T^t\right\| \leq \|T\|$. T^t heißt der *zu T transponierte Operator.* ♡

Es gilt: $T^t \in \mathcal{L}(F', E')$.

Satz III. 5. 7 *(von* Schauder*)*. Wenn T kompakt ist, dann ist T^t auch kompakt.

Satz III. 5. 8 *(von* Riesz-Schauder*)*. E sei Banachraum. $T \in \mathcal{K}(E)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\operatorname{Im}(T - \lambda\,\mathrm{id}) = (T - \lambda\,\mathrm{id})(E)$ ist abgeschlossen und

$$\ker(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \{\, x \in E \mid (T - \lambda\,\mathrm{id})x = 0 \,\}$$

ist endlichdimensional.

(ii) $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ ist surjektiv $\iff$ $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ injektiv (s. Fredholm'sche Alternative) d. h. inhomogenes Gleichungssystem ist bei beliebiger rechter Seite lösbar $\iff$ das homogene Gleichungssystem für $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ hat nur die triviale Lösung.

(iii) E sei unendlichdimensionaler Banachraum. Dann existiert Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $\sigma(T) = \{0, \lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Die Zahlen $\lambda \in \sigma(T)$ sind Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit (wobei $\lambda \neq 0$).

b. Kompakte Operatoren im Hilbertraum

Satz III. 5. 9. E sei Hilbertraum. Für $T \in \mathcal{L}(E)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) T ist vollstetig, d. h. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$.

(ii) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $y_n \rightharpoonup y \Rightarrow \langle Tx_n \,|\, y_n\rangle \to \langle Tx \,|\, y\rangle$.

(iii) T ist kompakt.

(iv) T^* ist kompakt.

Lemma III. 5. 10. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Beweis: Sei $y \in E$. $\langle Tx_n \,|\, y\rangle = \langle x_n \,|\, T^*y\rangle \to \langle x \,|\, T^*y\rangle = \langle Tx \,|\, y\rangle$. //

Beweis (von Satz III. 5. 9): **(iii)⇒(i)** Satz III. 5. 4

(i)⇒(iii) Sei $x_n \in E$, $\|x_n\| \leq 1$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d. h. $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Nach (i) $Tx_{n_k} \to Tx$. Also ist T kompakt.

(iii)⇒(ii)

$$\langle Tx_n \mid y_n\rangle - \langle Tx \mid y\rangle = \langle Tx_n - Tx \mid y_n\rangle + \langle Tx \mid y_n - y\rangle$$
$$|\langle Tx_n \mid y_n\rangle - \langle Tx \mid y\rangle| \le \|Tx_n - Tx\|\,\|y_n\| + |\langle Ty \mid y_n - y\rangle|$$

Angenommen, (ii) wäre falsch. Dann existieren Teilfolgen (x_{n_k}), (y_{n_k}) und $\varepsilon > 0$ mit

$$\left|\langle Tx_{n_k} \mid y_{n_k}\rangle - \langle Tx \mid y\rangle\right| \ge \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{5.3}$$

Da T kompakt ist und die konvergenten Folgen (x_n) und (y_n) beschränkt sind, existiert Teilfolge $(x_{n_{k_r}})_{r\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_{k_r}} \to Tx$, genauer:

$$Tx_{n_{k_r}} \to y,$$

da $x_{n_{k_r}} \rightharpoonup x$ und nach Lemma III. 5. 10 $Tx_{n_{k_r}} \rightharpoonup Tx$ folgt $Tx = y$.

$$\left|\left\langle Tx_{n_{k_r}} \mid y_{n_{k_r}}\right\rangle - \langle Tx \mid y\rangle\right| \le \underbrace{\left\|Tx_{n_{k_r}} - Tx\right\|}_{\to 0} \underbrace{\left\|y_{n_{k_r}}\right\|}_{\substack{\le c \\ \text{da } y_{n_{k_r}} \rightharpoonup y}}$$
$$+ \underbrace{\left\|\left\langle Tx \mid y_{n_{k_r}} - y\right\rangle\right\|}_{\substack{\to 0 \\ \text{da } y_{n_{k_r}} \rightharpoonup y}}$$

Die rechte Seite geht gegen 0 für $r \to \infty$. Die linke Seite ist aber $\ge \varepsilon$ nach (5.3). Das ist ein Widerspruch, also gilt (ii).

(ii)⇒(i)

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx\|^2 &= \langle Tx_n - Tx \mid Tx_n - Tx\rangle \\ &= \Big\langle Tx_n \mid \underbrace{Tx_n - Tx}_{y_n}\Big\rangle - \Big\langle Tx \mid \underbrace{Tx_n - Tx}_{y_n}\Big\rangle\end{aligned} \tag{5.4}$$

Es gilt $y_n = Tx_n - Tx$. Weil $x_n \rightharpoonup x$ und $T \in \mathcal{L}(E)$ folgt nach Lemma III. 5. 10 $Tx_n \rightharpoonup Tx$. Also gilt $y_n \rightharpoonup 0$. Nach (ii) gilt

$$\langle Tx_n \mid y_n\rangle \to \langle Tx \mid 0\rangle = 0$$

Weil $y_n \rightharpoonup 0$ gilt $\langle y \mid y_n\rangle \to 0$. Nach (5.4) gilt $\|Tx_n - Tx\| \to 0$, d. h. $Tx_n \to Tx$.

(iii) $\iff$ (iv) Z. z.: T kompakt $\iff$ T^* kompakt. Zeigen: T^* kompakt $\Rightarrow$ T kompakt. Sei $x_n \in E$, $\|x_n\| \le 1$. Wir zeigen: Tx_n besitzt konvergente Teilfolge. Da $T \in \mathcal{L}(E)$ und T^* kompakt, folgt $T^*T \in \mathcal{K}(E)$ (Idealeigenschaft). Also existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $y \in E$ mit $T^*T(x_{n_k}) \to y$.

$$\begin{aligned}\left\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\right\|^2 &= \langle T(x_{n_k} - x_{n_l}) \mid T(x_{n_k} - x_{n_l})\rangle \\ &= \langle T^*T(x_{n_k} - x_{n_l}) \mid x_{n_k} - x_{n_l}\rangle \\ &\le \left\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_l}\right\|^2\end{aligned}$$

Da $(T^*Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist, ist auch $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Also konvergiert (Tx_{n_k}) im Hilbertraum, d. h. T ist kompakt.

9.1.06 Sei T kompakt. Da $T = (T^*)^*$ ist nach eben T^* kompakt. //

c. Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz

Satz III. 5. 11 ***(Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz).*** E sei unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum. T sei ein selbstadjungierter, kompakter Operator. Dann existieren eine Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und ein NOS $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von E mit

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x \,|\, e_n \rangle e_n \quad \forall x \in E \tag{5.5}$$

$$Te_n = \lambda_n e_n \tag{5.6}$$

Bemerkung III. 5. 7. Für $x, y \in E$ sei $(x \otimes y)z = \langle z \,|\, x \rangle y$ $\forall z \in E$. Es ist $x \otimes y \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|x \otimes y\| = \|x\|\,\|y\|$. (5.5) besagt dann: $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$ (in starker Konvergenz).

Lemma III. 5. 12. Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ vollstetig und selbstadjungiert. $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ist dann ein Eigenwert von T.

Beweis: Da $T = T^*$ ist, gilt $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx \,|\, x \rangle|$. Daher existieren eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\langle Tx_n \,|\, x_n \rangle \to \alpha$, $|\alpha| = \|T\|$. Da T kompakt, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_k} \to y \in E$.

$$\begin{aligned}
\left\|(T - \alpha\,\mathrm{id})x_{n_k}\right\|^2 &= \langle Tx_{n_k} - \alpha x_{n_k} \,|\, Tx_{n_k} - \alpha x_{n_k} \rangle \\
&= \left\|Tx_{n_k}\right\|^2 + \alpha^2 \underbrace{\left\|x_{n_k}\right\|}_{=1} - 2\alpha \langle Tx_{n_k} \,|\, x_{n_k} \rangle \\
&\le \|T\|^2 + \underbrace{\alpha^2}_{=\|T\|^2} - 2\alpha \langle Tx_{n_k} \,|\, x_{n_k} \rangle = 2(\|T\|^2 - \alpha \langle Tx_{n_k} \,|\, x_{n_k} \rangle) \\
&\to 2(\|T\|^2 - \alpha^2) = 0 \\
\alpha x_{n_k} &= -(T - \alpha)x_{n_k} + Tx_{n_k} \to 0 + y = y
\end{aligned}$$

Wenn $\alpha = 0$, dann $\|T\| = 0$, also $T = 0$ und die Behauptung ist trivial. Für $\alpha \neq 0$ gilt $x_{n_k} \to \frac{y}{\alpha}$ und damit $(T - \alpha)x_{n_k} \to 0$. Weil T stetig ist, gilt $(T - \alpha)x_{n_k} \to (T - \alpha)\frac{y}{\alpha} = 0$. Also $Ty = \alpha y$, $\alpha = \|T\|$ oder $\alpha = -\|T\|$. //

Beweis (von Satz III. 5. 11): Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von T, $E_\lambda \coloneqq \{\, x \in E \mid Tx = \lambda x \,\}$ sei der zugehörige Eigenraum. $T(U_{E_\lambda}) = \lambda U_{E_\lambda}$ mit U_{E_λ} Einheitskugel von E_λ ist relativkompakt, weil T kompakt ist, also ist $\dim E_\lambda < \infty$.

Seien λ, λ' zwei verschiedene Eigenwerte von T, $\lambda \neq 0 \neq \lambda'$. Da T selbstadjungiert ist, gilt $E_\lambda \perp E_{\lambda'}$. Wir wählen aus jedem Raum E_λ eine ONB. Die Gesamtheit dieser Vektoren ist NOS $\{\, e_n \mid n \in I \,\}$ mit $I = \mathbb{N}$ oder $I = \{1, \dots, N\}$. Sei H_1 der von den Vektoren e_n, $n \in I$ erzeugte abgeschlossene lineare Teilraum von E. Es gilt $Te_n = \lambda_n e_n$, also

$$T\underbrace{\left(\sum_{r=1}^{s} \alpha_r e_r\right)}_{\in H_1} = \sum_{r=1}^{s} \alpha_r \lambda_r e_r \in H_1.$$

Also $T(H_1) \subseteq H_1$.

Behauptung: $T(H_1^\perp) \subseteq H_1^\perp$.

Beweis: Seien $x \in H_1$, $y \in H_1^\perp$. $\langle Tx \,|\, y\rangle = 0 = \langle x \,|\, Ty\rangle$. Also $Ty \perp H_1 \;\Rightarrow\; Ty \in H_1^\perp$. /

$H_1^\perp$ ist auch Hilbertraum. Sei $T_1 \in \mathcal{L}(H_1^\perp)$ mit $T_1 y = Ty$, $y \in H_1^\perp$. T_1 ist dann vollstetig und selbstadjungiert auf $H_1^\perp$.

Behauptung: $T_1 y = Ty = 0 \;\forall y \in H_1^\perp$.

Beweis: Wäre $T_1 \not\equiv 0$, dann $\|T_1\| \neq 0$. Nach Lemma III. 5. 12 hat T_1 einen von 0 verschiedenen Eigenwert (nämlich $\|T_1\|$ oder $-\|T_1\|$) $\Rightarrow T$ hat von 0 verschiedenen Eigenwert μ mit Eigenvektor $z \in H_1^\perp$. Nach Konstruktion gehört z zu H_1 und $H_1^\perp$, also $z = 0$, ist also kein Eigenvektor $\lightning$. $\Rightarrow$ $T_1 = 0$. /

E hat VNOS $\{\, e_n, f_i \;\mid\; n \in I,\; i \in J \,\}$, wobei $\{f_i\}$ VNOS von $H_1^\perp$. Sei $x \in E$. Dann

$$x = \sum_n \langle x \,|\, e_n\rangle\, e_n + \sum_i \langle x \,|\, f_i\rangle\, f_i.$$

Da T stetig ist, gilt

$$Tx = \sum_n \langle x \,|\, e_n\rangle\, Te_n + \sum_i \langle x \,|\, f_i\rangle \underbrace{T f_i}_{=0},$$

also $Tx = \sum_n \lambda_n \langle x \,|\, e_n\rangle\, e_n$. Wenn $|I| < \infty$, so ergänze die $\{e_n\}$ durch Hinzunahme von Basiselementen f_i zu einem NOS $\{\, e_n \;\mid\; n \in \mathbb{N} \,\}$. Dann gilt

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x \,|\, e_n\rangle\, e_n,$$

wobei $\lambda_{N+1} = \ldots = \lambda_{N+17} = \ldots = 0$.

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

Beweis: Angenommen, die Behauptung sei falsch. Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man o. B. d. A. annehmen, daß $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. $Te_n = \lambda_n e_n$, $|\lambda_n| \geq \frac{|\lambda|}{2}$ für $n \geq n_0$. $e_n = \lambda_n^{-1} T e_n = T\underbrace{(\lambda_n^{-1} e_n)}_{\in cU_E}$ für großes c. $\|e_n\| = 1$, o. B. d. A. $e_n \perp e_m$ für $n \neq m$. $e_n \in T(cU_E)$, also ist die Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht relativkompakt ($\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, $n \neq m$ $\lightning$ zu T kompakt). /

Damit

$$Te_k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \underbrace{\langle e_k \,|\, e_n\rangle}_{\delta_{k,n}}\, e_n = \lambda_k e_k$$

//

d. Anwendung auf Hilbert-Schmidt'sche Integraloperatoren

M sei Gebiet im $\mathbb{R}^n$ oder Abschluß eines Gebietes in $\mathbb{R}^n$. μ_L sei das Lebesgue-Maß auf M. $E = L^2(M, \mu_L)$. $K(\cdot,\cdot)$ sei L-meßbare Funktion auf $M \times M$ mit

$$\int_M \int_M |K(t,s)|^2 \underbrace{d\mu_L(t)\, d\mu_L(s)}_{d\mu_L(t,s)} < \infty \tag{5.7}$$

Wir definieren $(T_K f)(t) := \int_M K(t,s) f(s)\, d\mu_L(s)$ für $f \in L^2(M,\mu_L) = E$. Aus (5.7) folgt (wie früher): $T_K \in \mathcal{L}(E)$. Es sei noch $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ $\forall t,s \in M$. Dann ist T_K selbstadjungiert.

Bemerkung III. 5. 8. Aus (5.7) folgt: T_K ist kompakt.

Beweis: Sei $H = L^2(M \times M, \mu_L)$. Nach (5.7) gilt $K(\cdot,\cdot) \in H$. Da E unendlichdimensionaler und separabler Hilbertraum ist, besitzt E ein VNOS $\{\varphi_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$

$$\{\, \varphi_{nm}(t,s) := \varphi_n(t)\varphi_m(s) \;\mid\; n,m \in \mathbb{N} \,\}$$

ist VNOS für H. Da $K \in H$ gilt

$$K(t,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm}\varphi_{nm}(t,s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m}\varphi_n(t)\varphi_m(s).$$

Sei $K_N(t,s) := \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{n,m}\varphi_n(t)\varphi_m(s)$. K_N erfüllt auch (5.7).

$$(T_{K_N} f)(t) = \int_M K_N(t,s) f(s)\, d\mu_L(s) = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{n,m}\varphi_n(t)\left(\int_M \varphi_m(s) f(s)\, d\mu_L(s)\right) \in \operatorname{Lin}\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$$

$T_{K_N}(E)$ ist endlichdimensional. Da $T_{K_N} \in \mathcal{L}(E)$ ist T_{K_N} kompakt.

$$\begin{aligned}
((T_K - T_{K_N})f)(t) &= \int_M (K(t,s) - K_N(t,s)) f(s)\, d\mu_L(s) \\
\left\|T_K f - T_{K_N} f\right\|^2 &= \int_M \left|\int_M (K(t,s) - K_N(t,s)) f(s)\, d\mu_L(s)\right|^2 d\mu_L(t) \\
&\leq \int_M \left(\int_M |K(t,s) - K_N(t,s)|^2 \, d\mu_L(s)\right)\left(\int_M |f(s)|^2 \, d\mu_L(s)\right) d\mu_L(t) \\
&\qquad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)} \\
&= \|K - K_N\|^2_{L^2(M\times M)} \|f\|^2_{L^2(M)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\left\|T_K - T_{K_N}\right\| \leq \|K - K_N\|_{L^2(M\times M)} \to 0$ weil $K_N \to K$ in $L^2(M \times M)$. Daraus folgt

$$\left\|T_K - T_{K_N}\right\| \to 0.$$

Da T_{K_N} kompakt (denn $\dim T_{K_N}(E) < \infty$), folgt nach früherem Satz T_K ist kompakt. //

Kapitel IV.

Das Spektraltheorem für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Motivation

(i) Aus der linearen Algebra wissen wir: Sei $E = \mathbb{C}^n$, $\langle x \mid y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}$. Sei $\mathfrak{A} \in M_n(\mathbb{C})$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^\perp \in \mathbb{C}^n$ sei $T_\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{A}x$. Dann ist $T_\mathfrak{A} \in \mathcal{L}(E)$. Sei $a_{kl} = \overline{a_{lk}}$ $\forall k, l = 1, \ldots, n$. Dann ist $\mathfrak{A}$ hermitisch, also $T_\mathfrak{A}$ selbstadjungiert. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation existieren Eigenwerte $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ von $\mathfrak{A}$ und ein NOS aus zugehörigen Eigenvektoren $e_1, \ldots, e_n$. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sind ein VNOS, d. h. $x = \sum_{k=1}^n \langle x \mid e_k\rangle\, e_k$ und

$$T_\mathfrak{A}x = \mathfrak{A}x = \sum_{k=1}^n \langle x \mid e_k\rangle \underbrace{\mathfrak{A}e_k}_{=\lambda_k} = \sum_{k=1}^n \lambda_k(e_k \otimes e_k)x$$

Also[1]

$$T_\mathfrak{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{e_k \otimes e_k}_{\substack{\text{eindim.}\\ \text{Projektionsop.}}}$$

Also haben wir $T_\mathfrak{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k$ mit $P_kP_l = 0$ $\forall k \neq l$.

(ii) Wir haben den Hilbert-Schmidt'schen Entwicklungssatz (Satz III. 5. 11). Sei $T \in \mathcal{L}(E)$ vollstetig und selbstadjungiert. E sei separabel und unendlichdimensional. Dann existieren ein NOS (e_n) und eine reelle Nullfolge (λ_n) mit

$$T = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n \otimes e_n$$

Das *Problem* ist nun, daß wir eine Verallgemeinerung für beliebige beschränkte selbstadjungierte Operatoren im HIlbertraum suchen. Ziel wird sein:

$$T = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)$$

mit geeigneten Projektoren $E(\lambda)$. (Das ist ein Operatorwertiges Riemann-Stieltjes-Integral.)

Wir werden bekommen:

[1] $(x \otimes y)z = \langle z \mid x\rangle\, y$

(i) Strukturtheorem für selbstadjungierte Operatoren

(ii) Funktion $f(T) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$ definiert und untersuchbar (aber eventuell nicht explizit ausrechenbar), z. B. e^{itT}.

1. Spektralscharen

a. Definition und Beispiele

Definition IV. 1. 1 *(Spektralschar)*. H sei Hilbertraum. Eine *Spektralschar* auf H ist ein System $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Projektionsoperatoren auf H mit

(i) $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)\ \forall \lambda_1 \leq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (Monotonie)

(ii) $\lim_{\lambda \to \lambda_0 + 0} E(\lambda)x = E(\lambda_0)x\ \forall \lambda_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$ (starke rechtsseitige Stetigkeit)

(iii) $\lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)x = 0$ und $\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda)x = x\ \forall x \in H$. ♡

Bemerkung IV. 1. 1. Andere Terminologie: Zerlegung der Eins. Das hängt zusammen mit dem Begriff Spektralmaß.

Definition IV. 1. 2 *(beschränkte Spektralschar)*. Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. Es gebe $a, b \in \mathbb{R}$ mit $E(a) = 0$ und $E(b) = \mathrm{id}$. Wegen (i) folgt: $E(\lambda) = 0\ \forall \lambda \leq a$ und $E(\lambda) = \mathrm{id}\ \forall \lambda \geq b$. Dann heißt die Spektralschar *beschränkt*. ♡

Beispiel IV. 1. 2. (i) Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und (P_n) sei Folge von Projektionen auf dem Hilbertraum H. Es gelte $P_n P_m = 0\ \forall n \neq m$ und $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x\ \forall x \in H$.

$$E(\lambda) := \sum_{\lambda_n \leq \lambda} P_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Dann ist $\{E(\lambda)\}$ eine Spektralschar.

Die Monotonie ist klar (es ist $P_n \geq 0$). $E(\lambda)$ ist Projektionsoperator, da $P_n P_m = 0\ \forall n \neq m$:

$$(E(\lambda))^2 = \left(\sum_{n:\,\lambda_n \leq \lambda} P_n\right)\left(\sum_{m:\,\lambda_m \leq \lambda} P_m\right) = \sum_{\substack{n:\,\lambda_n \leq \lambda \\ m:\,\lambda_m \leq \lambda}} P_n P_m = \sum_{n:\,\lambda_n \leq \lambda} P_n^2 = \sum_{n:\,\lambda_n \leq \lambda} P_n = E(\lambda)$$

$$E(\lambda)^* = \left(\sum_{n:\,\lambda_n \leq \lambda} P_n\right)^* = \sum_{n:\,\lambda_n \leq \lambda} P_n^* = \sum_{n:\,\lambda_n \leq \lambda} P_n = E(\lambda)$$

$\Rightarrow$ $E(\lambda)$ Projektion.

Zur Rechtsstetigkeit: Sei $x \in H$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x$ nach Voraussetzung. Mit Pythagoras folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 = \|x\|^2$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k \geq K(\varepsilon)} \|P_k x\|^2 < \varepsilon^2$. Sei

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Wähle $\lambda > \lambda_0$ derart, daß keine der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{K(\varepsilon)}$ in $]\lambda_0, \lambda]$ liegt.

$$\begin{aligned}\|(E(\lambda) - E(\lambda_0))x\|^2 &= \left\| \left(\sum_{n:\, \lambda_n \le \lambda} P_n - \sum_{r:\, \lambda_r \le \lambda} P_r \right) x \right\|^2 \\ &= \left\| \left(\sum_{n:\, \lambda_0 < \lambda_n \le \lambda} P_n \right) x \right\|^2 = \sum_{n:\, \lambda_0 < \lambda_n \le \lambda} \|P_n\|^2 \\ &\le \sum_{k \ge K(\varepsilon)} \|P_k x\|^2 < \varepsilon \qquad \forall \lambda_0 < \lambda\end{aligned}$$

Zu (iii):

$$\|x - E(\lambda)x\|^2 = \sum_{n:\, \lambda_n > \lambda} \|P_n x\|^2 \tag{$\clubsuit$}$$

$$\left\|E(\lambda')x\right\|^2 = \sum_{n:\, \lambda_n \le \lambda} \|P_n x\| \tag{$\spadesuit$}$$

Wähle λ, λ' so, daß $\lambda' < \lambda_1, \ldots, \lambda_{K(\varepsilon)} < \lambda$. Dann ist ($\clubsuit$)$< \varepsilon^2$ und ($\spadesuit$)$\le \varepsilon^2$, d. h.

$$\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda)x = x, \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)x = 0.$$

(ii) Seien $a < b \in \mathbb{R}$. μ sei ein Maß auf $[a, b]$, $H = L^2([a, b]\,, \mu)$. Wir definieren

$$(E(\lambda) f)(t) = \chi_{]-\infty, \lambda]}(t) f(t) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f \in H.$$

$e_\lambda(t) := \chi_{]-\infty,\lambda]}(t)$. $\{E(\lambda)\}$ ist Spektralschar auf H:

$$\begin{aligned}\langle E(\lambda_1) f \mid f \rangle &= \int_{[a,b]} e_{\lambda_1}(t)\, \underbrace{f(t)\overline{f(t)}}_{\ge 0}\, d\mu(t) \\ &\le \int_{[a,b]} e_{\lambda_2} f(t)\overline{f(t)}\, d\mu(t) \\ &= \langle E(\lambda_2) f \mid f \rangle \qquad \forall \lambda_1 \le \lambda_2\end{aligned}$$

$e_\lambda^2 = e_\lambda$, $\overline{e_\lambda} = e_\lambda$, also ist $E(\lambda)$ Projektor. Für $\lambda < a$ ist $E(\lambda) f = 0$, für $\lambda \ge b$ ist $E(\lambda) f = f$, also ist $\{E(\lambda)\}$ beschränkt. ✓

b. Einfache Eigenschaften

(i) Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Da $E(\lambda)$ monoton wachsend ist und beschränkt ($\le$ id), existiert der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0 - 0} E(\lambda)$$

in der starken Konvergenz, d. h. es gibt einen beschränkten Operator $E(\lambda_0 - 0)$ mit $E(\lambda_0 - 0)x = \lim_{\lambda \to \lambda_0 - 0} E(\lambda)x$, $E(\lambda_0 - 0)$ ist auch Projektion und $E(\mu) \le E(\lambda_0 - 0) \le E(\lambda_0)$ für $\mu \le \lambda_0$.

(ii) Wir definieren Spektraloperatoren für Intervalle:

$$\begin{aligned} E([\lambda,\mu]) &\coloneqq E(\mu) - E(\lambda - 0) \\ E(]\lambda,\mu]) &\coloneqq E(\mu) - E(\lambda) \\ E([\lambda,\mu[) &\coloneqq E(\mu - 0) - E(\lambda - 0) \\ E(]\lambda,\mu[) &\coloneqq E(\mu - 0) - E(\lambda) \qquad\qquad \forall \lambda \le \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Es sei I eines der obigen Intervalle. Dann ist $E(I)$ auch ein Projektionsoperator. I_1, I_2 seien zwei solche Intervalle. Es gilt:

$$I_1 \cap I_2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad E(I_1)E(I_2) = 0,$$

d. h. $E(I_1)H \perp E(I_2)H$.

c. Operatorwertige Stieltjes-Integrale

Sei $\{ E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ beschränkte Spektralschar. (Dann existieren $m, M \in \mathbb{R}$ mit $E(\lambda) = 0\ \forall \lambda < m$, $E(\lambda) = \mathrm{id}\ \forall \lambda \geq M$.) Sei $b \in \mathbb{R}$ fest mit $b < m$. $u(\lambda)$ sei Borelfunktion auf $[b, M]$. Ziel ist es, $\int u(\lambda)\, dE(\lambda)$ zu definieren. $u(\lambda)$ sei beschränkt. O. B. d. A. sei $u(\lambda)$ reellwertig, denn für $u(\lambda) = u_1(\lambda) + iu_2(\lambda)$ mit u_1, u_2 reellwertig, definiere

$$\int_b^M u(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_b^M u_1(\lambda)\, dE(\lambda) + i \int_b^M u_2(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Fall 1: Sei $u(\lambda)$ stetig auf $[b, M]$. $\mathfrak{Z}$ sei eine Zerlegung des Intervalles $I = [b, M]$. $b = t_0 < \ldots < t_n = M$, $\delta_{\mathfrak{Z}} = \max_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|$. Wähle $\xi_k \in\,]t_{k-1}, t_k]$. Wir definieren die *Zwischensumme:*

$$S(u, \mathfrak{Z}) = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)(\underbrace{E(t_k) - E(t_{k-1})}_{=E(]t_{k-1},t_k])}) \in \mathcal{L}(H)$$

Man kann zeigen: Es gibt einen beschränkten Operator T_u mit $\lim_{\delta_{\mathfrak{Z}} \to 0} S(u, \mathfrak{Z}) = T_u$ in der Operatornorm, d. h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß $\|S(u, \mathfrak{Z}) - T_u\| < \varepsilon\ \forall$ Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ mit $\delta_{\mathfrak{Z}} < \delta(\varepsilon)$ und bei beliebiger Wahl der Teilpunkte $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ (Beweis analog zu skalarem Fall mit Satz von Cantor). Wir schreiben dann

$$T_u = \int_b^M u(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Da $E(\lambda) = 0\ \forall \lambda < b$ ist T_u unabhängig von b. Man schreibt auch

$$T_u = \int_{m-0}^M u(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Insbesondere gibt es

$$T_{u_0} = \int_{m-0}^M \lambda\, dE(\lambda) \quad \text{für} \quad u_0(\lambda) \equiv \lambda.$$

Fall 2: $u(\lambda)$ sei beschränkte, reellwertige Borelfunktion auf I.

Lemma IV. 1. 3 *(stetige Sesquilinearformen).* (i) Für $T \in \mathcal{L}(H)$ sei

$$B_T(x,y) := \langle Tx \,|\, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

B_T ist dann eine Sesquilinearform[2] auf $H \times H$ mit $|B_T(x,y)| \le \|T\| \, \|x\| \, \|y\| \ \forall x, y \in H$.

(ii) Sei B Sesquilinearform auf $H \times H$. Es gebe $c > 0$ mit

$$|B(x,y)| \le c \, \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H \tag{1.1}$$

Dann $\exists!\ T \in \mathcal{L}(H)$ mit $B = B_T$, d. h.

$$B(x,y) = \langle Tx \,|\, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

(iii) B sei Sesquilinearform und $c > 0$. Wenn $|B(x,x)| \le c \, \|x\|^2 \ \forall x \in H$, dann

$$|B(x,y)| \le 4c \, \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

Beweis: (i) folgt aus Cauchy-Schwarz.

(ii) Sei $x \in H$ fest. Definiere $F_x(z) := \overline{B(x,z)}$. F_x ist linear auf H.

$$|F_x(z)| = \left|\overline{B(x,z)}\right| \le c \, \|x\| \, \|z\| \quad \forall z \in H \qquad \text{nach (1.1)}$$

Also ist F_x stetig, nach dem Satz I. 4. 11 $\exists x' \in H$ mit $F_x(z) = \langle z \,|\, x'\rangle = \overline{B(x,z)}$

$$B(x,z) = \langle x' \,|\, z\rangle \quad \forall x \in H \tag{1.2}$$

Die Zuordnung $x \mapsto x'$ ist lineare Abbildung von H in H. Wir definieren $T(x) := x'$. Dann: $B(x,z) = \langle Tx \,|\, x\rangle \ \forall x, y \in H$ nach (1.2).

$$|B(x,Tx)| = |\langle Tx \,|\, Tx\rangle| = \|Tx\|^2 \le c \, \|x\| \, \|Tx\| \qquad \text{nach (1.1)}$$

$\|Tx\| \le c \, \|x\| \ \forall x \in H$, also $T \in \mathcal{L}(H)$.

(iii)

$$\begin{aligned}
4B(x,y) &= B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) + iB(x+iy, x+iy) - iB(x-iy, x-iy) \\
4\,|B(x,y)| &\le c(|x+y|^2 + |x-y|^2 + |x+iy|^2 + |x-iy|^2) \\
&\qquad \text{Seien } \|x\| \le 1, \|y\| \le 1 \\
&\le c \cdot 4 \cdot 2^2 \\
|B(x,y)| &\le 4c \\
\Rightarrow \quad |B(x,y)| &\le 4c \, \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H
\end{aligned}$$

//

[2]Eine Sesquilinearform ist eine Abbildung $B\colon H \times H \to \mathbb{C}$ mit

$$B(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + B(x_2, y)$$
$$B(x, \lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda} B(x, y_1) + B(x, y_2)$$

Sei $u(\lambda)$ wie oben. Wir definieren

$$\begin{aligned}
B(x,y) &:= \underbrace{\int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)x\,|\,y\rangle}_{\text{Riemann-Stieltjes-Integral}} \\
&:= \frac{1}{4}\Bigg(\int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)(x+y\,|\,, x+y\rangle - \int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)(x-y)\,|\,x-y\rangle \\
&\quad +i\int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)(x+iy)\,|\,x+iy\rangle - i\int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)(x-iy)\,|\,x-iy\rangle\Bigg)
\end{aligned}$$

$\lambda \mapsto \langle E(\lambda)z\,|\,z\rangle$ ist monoton wachsende Funktion. B ist dann eine Sesquilinearform auf $H \times H$.

$$\begin{aligned}
|B(x,x)| &= \left|\int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle\right| \\
&\quad \text{sei } |u(\lambda)| \le K \quad \forall \lambda \in [b, M[\\
&\le K \int_b^M d\, \langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle \\
&= K(\underbrace{\langle E(M)x\,|\,x\rangle}_{\text{id}} - \underbrace{\langle E(b)x\,|\,x\rangle}_{0}) \\
&= K\,\|x\|^2 \quad \forall x \in H
\end{aligned}$$

Nach Lemma IV. 1. 3 (ii) und (iii) existiert eindeutig bestimmter Operator $T_u \in \mathcal{L}(H)$ mit $B(x,y) = \langle T_u x\,|\,y\rangle$ $\forall x, y \in H$. Nach der Definition von B gilt

$$\langle T_u x\,|\,y\rangle = \int_b^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)x\,|\,y\rangle\,. \tag{1.3}$$

Wir schreiben

$$\int_b^M u(\lambda)\, dE(\lambda) \equiv \int_{m-0}^M u(\lambda)\, dE(\lambda) := T_u.$$

Dann gilt nach Definition:

$$\begin{aligned}
\left\langle\left(\int_{m-0}^M u(\lambda)\, dE(\lambda)\right)x\,\middle|\,y\right\rangle &\equiv \langle T_u x\,|\,y\rangle \\
&= \int_{m-0}^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)x\,|\,y\rangle \quad \forall x, y \in H \quad \text{nach (1.3)}
\end{aligned}$$

Man sagt: Das Integral $\int_{m-0}^M u(\lambda)\, dE(\lambda)$ existiert im schwachen Sinne.

Es gilt nun für reellwertige $u(\lambda)$:

$$\left\langle\left(\int_{m-0}^M u(\lambda)\, dE(\lambda)\right)x\,\middle|\,x\right\rangle = \int_{m-0}^M u(\lambda)\, d\, \langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H,$$

also ist $\int_{m-0}^M u(\lambda)\, dE(\lambda)$ selbstadjungiert und beschränkt. Insbesondere gilt: $\int_{m-0}^M \lambda\, dE(\lambda)$ ist beschränkter und selbstadjungierter Operator.

2. Funktionalkalkül beschränkter selbstadjungierter Operatoren

Im folgenden sei T ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf H.

a. Zwei Lemmata

Lemma IV. 2. 1 ***(Spektralabbildungssatz für Polynome).*** Für $p(x) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n x^n$ sei $p(T) := \sum_{n=0}^{k} \alpha_n T^n$, wobei $T^0 := \mathrm{id}$. Dann gilt

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{\, p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T) \,\} \quad \forall \text{ Polynome } p.$$

Beweis: „$\supseteq$“: Sei $\lambda \in \sigma(T)$, da das Polynom $p(x) - p(\lambda)$ für $x = \lambda$ Null ist, existiert Polynom $q(x)$ mit $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$. Damit

$$p(T) - p(\lambda)\,\mathrm{id} = (T - \lambda\,\mathrm{id})q(T) = q(T)(T - \lambda\,\mathrm{id}). \tag{2.1}$$

Wäre $p(\lambda) \in \rho(p(T))$, dann folgt aus (2.1):

$$(p(T) - p(\lambda)\,\mathrm{id})^{-1} q(T)(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{id} \ \text{ d. h.} \qquad A(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{id} \tag{2.2}$$
$$(T - \lambda\,\mathrm{id})q(T)(p(T) - p(\lambda)\,\mathrm{id})^{-1} = \mathrm{id} \ \text{ d. h.} \qquad (T - \lambda\,\mathrm{id})B = \mathrm{id} \tag{2.3}$$

$A(T - \lambda\,\mathrm{id})B = B = A$ nach (2.2) bzw. (2.3). Daraus folgt

$$\exists A \in \mathcal{L}(H): \quad A(T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} = (T - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} A = \mathrm{id}$$

also $\lambda \in \rho(T)$ Widerspruch, damit $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$.
„$\subseteq$“: O. B. d. A. sei $\deg p > 0$. Sei $\lambda \in \sigma(p(T))$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} & p(x) - \lambda = a_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_1) \\ \Rightarrow\quad & p(T) - \lambda\,\mathrm{id} = a_n(T - \lambda_1\,\mathrm{id})(T - \lambda_2\,\mathrm{id})\cdots(T - \lambda_n\,\mathrm{id}) \end{aligned}$$

Angenommen, $\lambda_i \in \rho(T)\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Dann sinde alle $T - \lambda_i\,\mathrm{id}$ invertierbar, also $p(T) - \lambda\,\mathrm{id}$ invertierbar, damit $\lambda \in \rho(p(T))$ im Widerspruch zu $\lambda \in \sigma(p(T))$. Also gibt es ein i mit $\lambda_i \in \sigma(T)$. Damit $p(\lambda_i) \in p(\sigma(T)) \;\Rightarrow\; p(\lambda_i) - \lambda = a_n(\lambda_i - \lambda_1)\cdots(\lambda_i - \lambda_n) = 0$. Also gilt $\lambda = p(\lambda_i) \in p(\sigma(T))$. //

Lemma IV. 2. 2 ***(Erweiterungssatz von* Tietze*).*** Sei M eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes E. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f\colon M \to [a, b]$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine stetige Funktion $\tilde{f}\colon E \to [a, b]$ mit $\tilde{f}|_M = f$.

Beweis: Siehe [3, 6].
Idee: Man gebe $\tilde{f}$ direkt an und zeige Stetigkeit. //

Korollar IV. 2. 3. Sei M abgeschlossene Teilmenge von $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann liegen die Polynome $\mathbb{C}[x]$ dicht im Banachraum $(C(M), \|f\|)$ mit $\|f\| = \sup_{t \in M} |f(t)|$.

Beweis: Sei $f \in C(M)$. Nach Lemma IV. 2. 2 gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} \in C([a, b])$ von f. Nach Satz von Weierstrass gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists p_\varepsilon \in \mathbb{C}[x]$ mit

$$\left|\tilde{f}(x) - p_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon \quad \forall \in [a, b]\,.$$

Also $\|f - p_\varepsilon\| < \varepsilon$ in $(C(M), \|\cdot\|)$. //

b. Stetiger Funktionalkalkül für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Seien H Hilbertraum, $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$. $\mathbb{C}[T]$ sei die $*$-Algebra (Definition III. 1. 3) aller Polynome $p(T)$.

Satz IV. 2. 4. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_0 \colon \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C}[T] \\ p(x) &\mapsto p(T) \end{aligned}$$

ist ein Homomorphismus von $*$-Algebren.

Beweis: Nachrechnen (Verträglichkeit der Operationen $+, \cdot, *$) //

Lemma IV. 2. 5. Es existiert genau ein $*$-Homomorphismus der C^*-Algebra (Definition III. 1. 5) $C(\sigma(T))$ in die C^*-Algebra $\mathcal{L}(H)$ mit $\Phi(1) = \mathrm{id}$, $\Phi(x) = T$.

Beweis: (i) *Existenz:* Sei Φ_0 wie in Satz IV. 2. 4, sei $p \in \mathbb{C}[x]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\Phi_0(p)\|^2 &= \left\|\Phi_0(p)^*\Phi_0(p)\right\| = \|\Phi_0(\overline{p}p)\| && \Phi_0 \text{ ist Homomorphismus} \\ &= \sup\{\,|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\Phi_0(\overline{p}p))\,\} && \text{nach Satz III. 4. 11} \\ &= \sup\left\{\,|\lambda| \;\middle|\; \lambda \in \sigma(\overline{p(T)}p(T))\,\right\} \\ &= \sup\{\,|\lambda| \mid \lambda \in \overline{p}p(\sigma(T))\,\} && \text{nach Lemma IV. 2. 1} \\ &= \sup\left\{\,\left|\overline{p(\mu)}p(\mu)\right| \;\middle|\; \mu \in \sigma(T)\,\right\} \\ &= \sup\left\{\,|p(\mu)|^2 \;\middle|\; \mu \in \sigma(T)\,\right\} \\ &= \sup\{\,|p(\mu)| \mid \mu \in \sigma(T)\,\}^2 = \|p\|^2_{C(\sigma(T))} \end{aligned}$$

Also: $\|\Phi_0(p)\| = \|p(T)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|p\|_{C(\sigma(T))}$. Also ist Φ_0 stetig. Daher gibt es eine Fortsetzung Φ von Φ_0 auf $C(\sigma(T))$ nach Korollar IV. 2. 3. Φ ist $*$-Homomorphismus und es gilt

$$\|\Phi(f)\| = \|f\| \quad \forall f \in C(\sigma(T)).$$

(ii) *Eindeutigkeit:* Seien $\Phi, \widetilde{\Phi}$ zwei $*$-Homomorphismen mit $\Phi(1) = \widetilde{\Phi}(1) = \mathrm{id}$ und $\Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) = T$. Dann gilt $\Phi(p) = \widetilde{\Phi}(p) = p(T)$ $\forall p \in \mathbb{C}[x]$. Φ und $\widetilde{\Phi}$ sind stetig. $\mathbb{C}[x]$ ist dicht in $C(\sigma(T))$ nach Korollar IV. 2. 3. Dann folgt aber $\Phi(f) = \widetilde{\Phi}(f)$ $\forall f \in C(\sigma(T))$. //

Lemma IV. 2. 6. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal, $\mu \in \sigma(A)$. Genau dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$ derart, daß $\lim_{n\to\infty}(A - \mu\,\mathrm{id})x_n = 0$.

Beweis: Dies folgt aus: A normal $\iff$ ($\mu \in \rho(A)$ $\iff$ $\exists c > 0 : \|(A - \mu\,\mathrm{id})x\| \geq c\,\|x\|$ $\forall x \in H$). Das beweist man mit Methoden vom Satz vom abgeschlossenen Graphen. //

Satz IV. 2. 7. (i) $\|f(T)\| = \|f\|_{C(\sigma(T))}$ $\forall f \in C(\sigma(T))$ mit $f(T) := \Phi(f)$.

(ii) Wenn $f(t) \geq 0$ $\forall t \in \sigma(T)$, $f \in C(\sigma(T))$, dann ist $f(T) \geq 0$ in $\mathcal{L}(H)$.

(iii) Jeder Operator $f(T)$ mit $f \in C(\sigma(T))$ ist normal.

(iv) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = \{ f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T) \}$ (Spektralabbildungssatz für stetige Funktionen)

Beweis: (i) Wurde in Lemma IV. 2. 5 gezeigt.

(ii) Sei $f(t) \geq 0 \,\forall t \in \sigma(T)$. Dann gibt es $g \in C(\sigma(T))$ mit $g(t) \in \mathbb{R} \,\forall t$, $g(t) \geq 0$, $g(t)^2 = f(t) \,\forall t$. Dann gilt

$$\langle f(T)x \mid x\rangle = \left\langle g(T)^2 x \mid x\right\rangle = \langle g(T)x \mid g(T)x\rangle \geq 0 \forall x \in H$$

(iii) $f(T)^* f(T) = \Phi(f)^*\Phi(f) = \Phi(f^* \cdot f) = \Phi(f \cdot f^*) = \Phi(f)\Phi(f)^* = f(T)f(T)^*$.

(iv) Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Angenommen, $\mu \notin f(\sigma(T))$. Sei $g(t) = (f(t) - \mu)^{-1}$, $t \in \sigma(T)$. g ist stetige Funktion auf $\sigma(T)$, $\sigma(T)$ ist kompakt, d. h. abgeschlossen und beschränkt. Es gilt

$$g(t)(f(t) - \mu) = 1 = (f(t) - \mu)f(t) \quad \forall t \in \sigma(T).$$

Φ ist Homomorphismus, also $g(T)(f(T) - \mu\,\mathrm{id}) = \mathrm{id} = (f(T) - \mu\,\mathrm{id})g(T)$, wobei $g(T) \in \mathcal{L}(H)$, damit gilt $g(T) = R_\mu(f(T)) \Rightarrow \ \mu \in \rho(f(T))$ im Widerspruch zu $\mu \in \sigma(T)$.

Zu „$\supseteq$“: Sei $\lambda \in f(\sigma(T))$, also $\lambda = f(\mu)$, $\mu \in \sigma(T)$. Zu zeigen: $\lambda \in \sigma(f(T))$. $\mathbb{C}[x]$ ist dicht in $C(\sigma(T))$ nach Korollar IV. 2. 3. Also gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $p_n \in \mathbb{C}[x]$ mit

$$p_n \rightrightarrows f \quad \text{auf} \quad C(\sigma(T)). \tag{2.4}$$

Da $\underbrace{\|p_n(T) - f(T)\|}_{\Phi(p_n - f)} = \|p_n - f\|$ nach (i), folgt

$$p_n(T) \rightrightarrows f(T) \quad \text{in Operatornorm.} \tag{2.5}$$

Es gilt $\mu \in \sigma(T)$, also $p_n(\mu) \in \sigma(p(T))$ nach Lemma IV. 2. 1. Nach Lemma IV. 2. 6 gibt es eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$(p_n(T) - p_n(\mu)\,\mathrm{id})x_m \to 0. \tag{2.6}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\|(f(T) - \lambda\,\mathrm{id})x_m\| &= \|(f(T) - p_n(T))x_m\| + \|(p_n(T) - p_n(\mu)\,\mathrm{id})x_m\| + \|p_n(\mu)\,\mathrm{id} - f(\mu)\,\mathrm{id}\| \\ &\leq \underbrace{\|f(T) - p_n(T)\|}_{\to 0\ (2.5)} + \underbrace{\|(p_n(T) - p_n(\mu))x_m\|}_{\to 0\ (2.6)} + \underbrace{\|p_n(\mu) - f(\mu)\|}_{\to 0\ (2.4)} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

//

Also $\|f(T) - \lambda\,\mathrm{id})x_m\| \to 0$ für $m \to \infty$. Nach der Umkehrung des Lemmas folgt $\lambda \in \sigma(f(T))$.

c. Das Spektraltheorem

Satz IV. 2. 8 *(Spektraltheorem)*. Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Es seien m untere und M obere Schranken von T.

(i) Dann existiert eine Spektralschar $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ mit

$$E(a) = 0 \quad \forall a < m \text{ und } E(b) = \mathrm{id} \quad \forall b \geq M \tag{2.7}$$

$$u(T) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda)\, dE(\lambda) \quad \forall u \in C(\sigma(T)) \tag{2.8}$$

$$\text{Insbesondere gilt:} \quad T = \int_{m-0}^{M} \lambda\, dE(\lambda) \tag{2.9}$$

(ii) $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ist durch (2.7) und (2.9) eindeutig bestimmt.

Beweis: (i) **1. Schritt: Konstruktion der Spektralschar**

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$g_{\lambda,n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq \lambda \\ 1 - n(t-\lambda) & \text{für } \lambda < t < \lambda + \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } t \geq \lambda + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Dann gilt $g_{\lambda,n} \in C(\mathbb{R})$ und weiter

$$\begin{aligned} & 1 \geq g_{\lambda,n}(t) \geq g_{\lambda,n+1}(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{id} \geq g_{\lambda,n}(T) \geq g_{\lambda,n+1}(T) \geq 0 \quad \forall T \in \mathcal{L}(H) \quad \text{(Eigenschaften des Funktionalkalküls)} \\ g_{\lambda,n} = \overline{g_{\lambda,n}} \quad \Rightarrow \quad & g_{\lambda,n}(T) = g_{\lambda,n}(T)^* \end{aligned}$$

$\{g_{\lambda,n}(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallende, beschränkte Folge selbstadjungierter Operatoren. Diese Folge konvergiert in der starken Konvergenz gegen einen selbstadjungierten Operator $E(\lambda)$, d. h.

$$E(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} g_{\lambda,n}(T)x.$$

Aus

$$\begin{aligned} g_{\lambda,2n}(t) \leq g_{\lambda,n}(t)^2 \leq g_{\lambda,n}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad & \text{folgt} \\ g_{\lambda,2n}(T) \leq g_{\lambda,n}(T)^2 \leq g_{\lambda,n}(T), \quad & \text{mit Limes in starker Konvergenz:} \\ E(\lambda) \leq E(\lambda)^2 \leq E(\lambda) \quad \Rightarrow \quad & E(\lambda) = E(\lambda)^2 \end{aligned}$$

(Benutze $g^2_{\lambda,n}(T) = g_{\lambda,n}(T)g_{\lambda,n}(T) = g_{\lambda,n}(T)^2$.) Da $E(\lambda) = E(\lambda)^*$ und $E(\lambda) = E(\lambda)^2$ ist $E(\lambda)$ Projektionsoperator. Für $\lambda < m$ ist $g_{\lambda,n}(t) = 0\ \forall t \in \sigma(T)$ und großes n. Damit ist $g_{\lambda,n}(T) = 0$ und $E(\lambda) = 0$. Analog gilt $E(\lambda) = \mathrm{id}$ für $\lambda \geq M$. Für $\lambda < \mu$ gilt $g_{\mu,n} - g_{\lambda,k} \geq 0$ falls $\frac{1}{k} < \mu - \lambda$, also

$$E(\lambda) - E(\lambda) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E(\mu) \geq E(\lambda).$$

D. h., wir haben die Monotonie von $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ gezeigt.

Zur Rechtsstetigkeit: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Big\|\underbrace{(E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))}_{\substack{\text{Projektion, da}\\ E(\lambda+\varepsilon)\geq E(\lambda)}}x\Big\|^2 &= \langle (E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))x \,|\, (E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))x\rangle \\
&= \left\langle (E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))^2 x \,|\, x\right\rangle \\
&= \langle (E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))x \,|\, x\rangle \\
&\leq \langle (g_{\lambda+\varepsilon,n}(T)-E(\lambda))x \,|\, x\rangle \quad \text{denn } \langle E(\lambda+\varepsilon)x \,|\, x\rangle \leq \langle g_{\lambda+\varepsilon,n}(T)x \,|\, x\rangle \\
&= \langle (g_{\lambda+\varepsilon,n}(T)-g_{\lambda,n}(T))x \,|\, x\rangle + \langle (g_{\lambda,n}(T)-E(\lambda))x \,|\, x\rangle \\
&\leq \underbrace{\sup_{t\in\sigma(T)} \left|g_{\lambda+\varepsilon,n}(T)-g_{\lambda,n}(T)\right|}_{=n\varepsilon,\text{ falls } n\varepsilon\leq 1} \|x\|^2 + \underbrace{\langle (g_{\lambda,n}(T)-E(\lambda))x \,|\, x\rangle}_{<\delta \text{ für } n\geq n_\delta}
\end{aligned}$$

Wir fixieren ein $n \geq n_\delta$ und wählen für dieses n ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $n\varepsilon_0 \|x\|^2 < \delta$. Dann gilt

$$\|E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))x\|^2 \leq n\varepsilon \|x\|^2 + \delta \leq 2\delta \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

d. h.

$$\lim_{\varepsilon\to+0} E(\lambda+\varepsilon)x = E(\lambda)x.$$

2. Schritt:

Sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung: $t_0 < m \leq t_1 < \ldots < t_n = M$. O. B. d. A. sei u reellwertig. Nach Lemma IV. 2. 2 kann man o. B. d. A. annehmen, daß $u \in C(\mathbb{R})$. Seien

$$m_i := \inf_{t\in[t_{i-1},t_{i+1}]} u(t), \quad M_i := \sup_{t\in[t_{i-1},t_{i+1}]} u(t).$$

Sei weiter $\delta(u) := \sup_{i=1,\ldots,n-1}(M_i - m_i)$. Es gilt:

$$m_i \underbrace{(g_{t_i,k} - g_{t_{i-1},k})}_{\geq 0} \leq u(t)(g_{t_i,k} - g_{t_{i-1},k}) \leq M_i(g_{t_i,k} - g_{t_{i-1},k})$$

für hinreichend große k (O. B. d. A. $t_i + \frac{1}{k} < t_{i+1}$). Dann gilt auch

$$m_i(g_{t_i,k}(T) - g_{t_{i-1},k}(T)) \leq u(T)(g_{t_i,k}(T) - g_{t_{i-1},k}(T)) \leq M_i(g_{t_i,k}(T) - g_{t_{i-1},k}(T))$$

Wir bilden den Grenzwert für $k \to \infty$ in starker Konvergenz:

$$\begin{aligned}
m_i(E(t_i) - E(t_{i-1})) \leq u(T)&(E(t_i) - E(t_{i-1})) \leq M_i(E(t_i) - E(t_{i-1})) \\
u(T) - S(u,\mathfrak{Z}) &= u(T) - \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)(E(t_i) - E(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (u(T) - u(\xi_i)) \underbrace{(E(t_i) - E(t_{i-1}))}_{=:\Delta E_i}
\end{aligned}$$

wegen $\sum_{i=1}^{n} E(t_i) - E(t_{i-1}) = E(t_n) - E(t_0) = \mathrm{id} - 0 = \mathrm{id}$. Weil $m_i\Delta E_i \leq u(T)\Delta E_i \leq M_i\Delta E_i$ folgt

$$u(T) - S(u,\mathfrak{Z}) \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta E_i \leq \delta(U)\,\mathrm{id}\,.$$

Analog folgert man $-(u(T) - S(u, \mathfrak{Z})) \leq \delta(u)\,\mathrm{id}$. $Q := u(T) - S(u, \mathfrak{Z})$ ist selbstadjungiert, also folgt

$$\|u(T) - S(u, \mathfrak{Z})\| \leq \delta(u),$$

denn $\|u(T) - S(u, \mathfrak{Z})\| \leq \max(|m_Q|, |M_Q|)$. Da u gleichmäßig stetig ist auf $[a, b]$ (Satz on Cantor), gibt es $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $|u(x) - u(x')| < \varepsilon$ falls $|x - x'| < \delta_\varepsilon$. Wenn $|t_{i+1} - t_{i-1}| < \delta_\varepsilon \ \forall i$, dann $\delta(u) < \varepsilon$ und damit

$$\|u(T) - S(u, \mathfrak{Z})\| < \varepsilon.$$

(ii) Sei $\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ Spektralschar, für die (2.7) und (2.9) gelten. Dann ist mit $T = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE(\lambda)$

$$S(\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \underbrace{(E(t_i) - E(t_{i-1}))}_{=:\Delta E_i \text{ Proj.}}$$

$$\lim_{\delta_{\mathfrak{Z}} \to 0} S(\mathfrak{Z})x = Tx$$

$$S(\mathfrak{Z})^m = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \Delta E_i \right)^m = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^m \Delta E_i,$$

denn $\Delta E_i \Delta E_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \Delta E_i & i = j \end{cases}$. Also

$$\lim_{\delta_{\mathfrak{Z}} \to 0} S(\mathfrak{Z})^m x = T^m x, \quad \text{d. h. } T^m = \int_{m-0}^{M} \lambda^m \, dE(\lambda)$$

$$\lim_{d_{\mathfrak{Z}} \to 0} S(\mathfrak{Z})^m x = \int_{m-0}^{M} \lambda^m \, dE(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad p(T) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) \, dE(\lambda) \quad \forall p \in \mathbb{C}[x]$$

$$\langle p(T)x \,|\, y \rangle = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) \, d \langle E(\lambda)x \,|\, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Durch Grenzübergang folgt

$$\langle u(T)x \,|\, y \rangle = \int_{m-0}^{M} u(\lambda) \, d \langle E(\lambda)x \,|\, y \rangle \quad \forall u \in C(\mathbb{R})$$

Wären $\{E(\lambda)\}$ und $\{\tilde{E}(\lambda)\}$ zwei Spektralscharen mit (2.7) und (2.9). Nach dem eben gezeigten Schluß gilt:

$$\langle u(T)x \,|\, y \rangle = \int_{m-0}^{M} u(\lambda) \, d \underbrace{\langle E(\lambda)x \,|\, y \rangle}_{\text{Maß}} = \int_{m-0}^{M} u(\lambda) \, d \underbrace{\left\langle \tilde{E}(\lambda)x \,|\, y \right\rangle}_{\text{Maß}} \quad \forall u \in C(\mathbb{R})$$

Setze $x = y$, dann folgt $\langle E(\cdot)x \,|\, x \rangle = \left\langle \tilde{E}(\cdot)x \,|\, x \right\rangle$ als Maße. Da E und $\tilde{E}$ rechtsstetig sind und $E(-\infty) = \tilde{E}(-\infty) = 0$ folgt

$$\langle E(\lambda)x \,|\, x \rangle = \left\langle \tilde{E}(\lambda)x \,|\, x \right\rangle \quad \forall x \in H$$

Mit der Polarisierungsgleichung folgt $\langle E(\lambda)x \,|\, y \rangle = \left\langle \tilde{E}(\lambda)x \,|\, y \right\rangle \ \forall x, y \in H$, damit also

$$E(\lambda) = \tilde{E}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \qquad //$$

d. Spektrum und Spektralschar

Satz IV. 2. 9. Sei $\mathcal{L}(H) \ni T = T^*$ mit Spektralschar $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda \in \rho(T) \iff \exists \varepsilon = \varepsilon_{\lambda_0} > 0$ mit $E(\lambda) = E(\lambda_0)\ \forall \lambda :\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$

(ii) $\lambda_0 \in \sigma_p(T) \iff E(\lambda_0 - 0) \neq E(\lambda_0)$. Ist dies erfüllt, dann ist $E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)$ der Projektionsoperator auf dem Raum $\{\, x \in H \mid T(x) = \lambda_0 x \,\}$.

Beweis: (i) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Da $\rho(T)$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $|\lambda - \lambda_0| < 2\varepsilon \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Sei $\frac{1}{n} < \varepsilon$ und $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned} & g_{\lambda,n}(t) = g_{\lambda_0,n}(t) \quad \forall t \in \sigma(T) \\ \Rightarrow\quad & g_{\lambda,n}(T) = g_{\lambda_0,n}(T) \quad \Big|\ \lim_{n\to\infty} \\ \Rightarrow\quad & E(\lambda) = E(\lambda_0). \end{aligned}$$

Sei jetzt $E(\lambda) = E(\lambda_0)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$. Wir wählen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < \lambda_0 - \varepsilon < \lambda_0 + \varepsilon < b$, $M_T \leq b$, $a < m_T$. Dann gilt

$$u(T) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_{a}^{\lambda_0-\varepsilon} u(\lambda)\, dE(\lambda) + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b} u(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Sei $g(t) := \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda_0} & \text{für } |t - \lambda_0| \geq \varepsilon \\ \frac{t-\lambda_0}{\varepsilon^2} & \text{für } |t-\lambda_0| < \varepsilon \end{cases}$. Dann ist $g(t)$ stetig auf $\mathbb{R}$. Sei $f(t) = (t - \lambda_0)g(t)$. Für $|t - \lambda_0| \geq \varepsilon$ ist $f(t) = 1$.

$$\begin{aligned} f(T) &= \int_{a}^{\lambda_0-\varepsilon} 1\, dE(\lambda) + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b} 1\, dE(\lambda) = \cancel{E(\lambda_0 - \varepsilon)} - E(a) + E(b) - \cancel{E(\lambda_0 + \varepsilon)} \\ &= E(b) - E(a) = \mathrm{id} - 0 = \mathrm{id} \\ \mathrm{id} = f(T) &= (T - \lambda_0\,\mathrm{id})g(T) = g(T)(T - \lambda_0\,\mathrm{id}) \end{aligned}$$

denn $f(t) = (t - \lambda_0)g(t) = g(t)(t - \lambda_0)$. Also $\lambda_0 \in \rho(T)$, da $g(T) \in \mathcal{L}(H)$.

(ii) Da $E(\lambda) \leq E(\lambda_0)\ \forall \lambda \leq \lambda_0$ ist $E(\lambda_0 - 0)E(\lambda_0)$. Also ist $E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)$ Projektionsoperator. Seien $H_0 := (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))H$ und $x \in H_0$. Für $\lambda < \lambda_0$ ist

$$E(\lambda)x = E(\lambda)(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))x = E(\lambda)x - E(\lambda)x = 0 \quad \text{da } P_1 \leq P_2 \Rightarrow P_1P_2 = P_1.$$

Für $\lambda > \lambda_0$ ist

$$E(\lambda)x = E(\lambda)(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))x = (E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))x = x, \text{ da } x \in H_0.$$

Es gilt

$$\langle Tx \,|\, y\rangle = \int_{m-0}^{M} \lambda\, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, y\rangle = \lambda_0\,\langle x \,|\, y\rangle \quad \forall y \in H$$

und damit $\langle (T - \lambda_0\,\mathrm{id})x \,|\, y\rangle = 0\ \forall y \in H$, also $Tx = \lambda_0 x$.

Umgekehrt sei $Tx = \lambda_0 x$ für ein $x \in H$. Wir zeigen: $x \in H_0$.

$$0 = \|(T - \lambda_0\,\mathrm{id})x\|^2 = \left\langle (T - \lambda_0\,\mathrm{id})^2 x \,|\, x\right\rangle = \int_{m-0}^{M} \underbrace{(\lambda - \lambda_0)^2}_{>0\ \forall \lambda \neq \lambda_0}\, d\,\underbrace{\langle E(\lambda)x \,|\, x\rangle}_{\mu_x(\lambda)}$$

Damit gilt $\operatorname{supp}\mu_x \subseteq \{\lambda_0\}$. $\langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle$ ist konstant auf $]-\infty, \lambda_0[$ und auf $]\lambda_0, \infty[$. Für $\lambda < \lambda_0$ gilt: $\langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle = 0 = \|E(\lambda)x\|^2 \;\Rightarrow\; E(\lambda)x = 0$.
Für $\lambda > \lambda_0$ gilt: $\langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle = \langle x\,|\,x\rangle$,

$$\Big\langle \underbrace{(\mathrm{id} - E(\lambda))}_{\text{Proj.}}\, x\,|\,x \Big\rangle = 0 = \|(\mathrm{id} - E(\lambda))x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad (\mathrm{id} - E(\lambda))x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = E(\lambda)x$$

Damit: aus $x = E(\lambda)x = E(\lambda_0)x \;\forall\lambda > \lambda_0$ und $E(\lambda_0 - 0)x = 0$ folgt

$$(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))x = x - 0 = x \quad \Rightarrow \quad x \in H_0.$$

//

Bemerkung IV. 2. 1. (i) $u(T) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} u(\lambda)\, dE(\lambda)$

(ii) $R_{\lambda_0}(T) = \int_{\sigma(T)} \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\, dE(\lambda) \quad \forall \lambda_0 \in \rho(T)$

e. Existenz einer Quadratwurzel

Satz IV. 2. 10 *(Quadratwurzel)*. Sei $\mathcal{L}(H) \ni T = T^* \geq 0$.

(i) Dann existiert ein $S \in \mathcal{L}(H)$, $S = S^* \geq 0$ und $S^2 = T$.

(ii) Wenn gilt $CT = TC$ für ein $C \in \mathcal{L}(H)$, so folgt $CS = SC$. Es gilt $ST = TS$.

(iii) S ist eindeutig.

Wir schreiben $S = T^{\frac{1}{2}}$ und nennen S die *Quadratwurzel* von T.

Beweis: (i) Sei $T = \int_{m-0}^{M} \lambda\, dE(\lambda)$ die Spektralzerlegung von T. Da $T \geq 0$ ist, gilt $m_T \geq 0$. Da $\sigma(T) \subseteq [m_T, M_T]$ folgt $\sigma(T) \subseteq [0, M_T]$. Somit gilt $T = \int_{0-0}^{M} \lambda\, dE(\lambda)$. $u(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ ist stetige Funktion auf $\sigma(T)$. Sei $S = u(T) = \int_{0-0}^{M} \sqrt{T}\, dE(\lambda)$, $M = M_T$. Dann gilt

$$\langle S\,x\,|\,x\rangle = \int_{0-0}^{M} \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\geq 0}\; \underbrace{d\,\langle E(\lambda)x\,|\,x\rangle}_{\geq 0} \geq 0,$$

also $S \geq 0$. $S^2 = u(T)u(T) = u^2(T) = T$.

(ii) Sei $TC = CT$. Durch Induktion erhält man $CT^n = T^nC$, und damit $Cp(T) = p(T)C$ für Polynome. Damit erhält man über den Satz von Weierstrass $Cf(T) = f(T)C$ für $f \in C(\sigma(T))$. Insbesondere also mit $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$: $CS = SC$. Mit $C = T$ folgt dann $ST = TS$.

(iii) Sei $\tilde{S} \in \mathcal{L}(H)$, $\tilde{S} = \tilde{S}^* \geq 0$ mit $\tilde{S}^2 = T$. Zeige: $S = \tilde{S}$. Es gilt $\tilde{S}T = \tilde{S}\tilde{S}^2 = \tilde{S}^2\tilde{S} = T\tilde{S}$. Nach (ii) folgt: $\tilde{S}S = S\tilde{S}$. Also

$$\begin{aligned}\underbrace{(S - \tilde{S})S(S - \tilde{S})}_{\geq 0} + \underbrace{(S - \tilde{S})\tilde{S}(S - \tilde{S})}_{\geq 0} &= (S - \tilde{S})(S + \tilde{S})(S - \tilde{S}) \\ &= (S^2 - \tilde{S}^2)(S - \tilde{S}) = (T - T)(S - \tilde{S}) \\ &= 0\end{aligned}$$

da $\langle ASAx \,|\, x\rangle = \langle SAx \,|\, Ax\rangle$. Also $(S - \tilde{S})S(S - \tilde{S}) = (S - \tilde{S})\tilde{S}(S - \tilde{S})$ und somit

$$\begin{aligned}
0 &= (S - \tilde{S})S(S - \tilde{S}) - (S - \tilde{S})\tilde{S}(S - \tilde{S}) \\
&= (S - \tilde{S})^3 \\
\Rightarrow \quad 0 &= (S - \tilde{S})^4 \\
0 &= \left\|(S - \tilde{S})^4\right\| = \left\|(S - \tilde{S})^2\right\|^2 = \left\|S - \tilde{S}\right\|^4 \\
\Rightarrow \quad S - \tilde{S} &= 0 \\
\Rightarrow \quad S &= \tilde{S}
\end{aligned}$$

//

Korollar IV. 2. 11. Seien $A, B \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^* \geq 0$, $B = B^* \geq 0$. Wenn $AB = BA$, dann ist $AB = (AB)^* \geq 0$.

Beweis: Da $AB = BA$ folgt $AB^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}}A$ nach Satz IV. 2. 10.

$$\langle ABx \,|\, x\rangle = \left\langle AB^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}x \,\middle|\, x\right\rangle = \left\langle B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}x \,\middle|\, x\right\rangle = \left\langle AB^{\frac{1}{2}}x \,\middle|\, B^{\frac{1}{2}}x\right\rangle.$$

//

f. Meßbarer Funktionalkalkül

Wir haben $u(T)$ für Funktionen wie $u(\lambda) = \chi_{]-\infty,\lambda_0]}$ noch nicht definiert, da u nicht stetig ist.

Sei nun $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ mit Spektralzerlegung $T = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE(\lambda)$. $B(\sigma(T))$ sei der Vektorraum aller beschränkten Borelfunktionen[3] auf $\sigma(T)$. Sei $\|f\|_\infty$ die Norm von $L^\infty(\sigma(T))$. Man kann zeigen:

(i) $(B(\sigma(T)), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum

(ii) Zu jedem $f \in B(\sigma(T))$ existiert eine Folge (f_n) mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$, $f_n \in C(\sigma(T))$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)\ \forall t \in \sigma(T)$.

Symbol: $f_n \underset{b}{\to} f$ für $f_n, f \in B(\sigma(T))$, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)\ \forall t \in \sigma(T)$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$. Das Integral $\int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, dE(\lambda)$ sei wie früher definiert durch

$$\Bigg\langle \underbrace{\left(\int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, dE(\lambda)\right)}_{=: f(T)} x \,\Bigg|\, y \Bigg\rangle := \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, d\langle E(\lambda)x \,|\, y\rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Wir haben damit eine Zuordnung $B(\sigma(T)) \ni f \mapsto f(T) \in \mathcal{L}(H)$.

Satz IV. 2. 12. (i) Die Abbildung $f \mapsto f(T)$ ist ein stetiger $*$-Homomorphismus von $(B(\sigma(T)), \|\cdot\|)$ in $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|)$.

(ii) Wenn $f_n, f \in B(\sigma(T))$ und $f_n \underset{b}{\to} f$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(T)x = f(T)x.$$

[3] Def. z. B.: Menge der Funktionen mit $\{\, t \in M \mid f(t) \leq \lambda \,\} \in \mathcal{B}(M)$.

Beweis: (ii): O. B. d. A. sei $f = 0$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 \ \forall t \in \sigma(T)$. $|f_n(t)| \leq L$ für $t \in \sigma(T), n \in \mathbb{N}$ $\langle E(\cdot)x \,|\, x\rangle$-fastüberall. O. B. d. A. gelte dies für alle $t \in \sigma(T)$. L ist integrierbar, denn

$$\int_{\sigma(T)} L \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, x\rangle \leq L \int_{-\infty}^{\infty} 1 \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, x\rangle = L(\langle \mathrm{id}\, x \,|\, x\rangle - \langle 0x \,|\, x\rangle) = L\,\|x\|^2 .$$

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue erfüllt.

$$\begin{aligned}\underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} \underbrace{|f_n(\lambda)|^2}_{\to 0} \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, x\rangle}_{\|f_n(T)x\|^2} &= \int_{\sigma(T)} \underbrace{\lim_{n\to\infty} |f_n(\lambda)|^2}_{=0} \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, x\rangle \quad \text{(S. v. Lebesgue)} \\ &= \underbrace{\int_{\sigma(T)} 0 \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, x\rangle = 0}_{\|\underbrace{f(T)x}_{=0}\|}\end{aligned}$$

(i): Wir zeigen etwa $(fg)(T) = f(T)g(T)$ für $f, g \in B(\sigma(T))$. Nach dem stetigen Funktionalkalkül gilt dies für stetige Funktionen. Seien $f, g \in B(\sigma(T))$. Dann existieren Folgen $(f_n), (g_n)$ mit $f_n, g_n \in C(\sigma(T))$ mit $f_n \underset{b}{\to} f$, $g_n \underset{b}{\to} g$, und damit $f_n g_n \underset{b}{\to} fg$. Sei $\Phi(f) = f(T)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f_n g_n)x \,|\, y\rangle = \langle \Phi(f_n)\Phi(g_n)x \,|\, y\rangle &= \left\langle \Phi(g_n)x \,|\, \Phi(\overline{f_n})y \right\rangle \quad \forall x, y \in H \quad \Big|\ \lim_{n\to\infty} \\ \langle \Phi(fg)x \,|\, y\rangle &= \left\langle \Phi(g)x \,|\, \Phi(\overline{f})y \right\rangle \\ &= \left\langle \underbrace{\Phi(\overline{f})^*}_{=\Phi(f)} \Phi(g)x \,|\, y \right\rangle \quad \forall x, y \in H\end{aligned}$$

Damit also $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. Der Rest des Beweises findet sich an anderer Stelle genauer. //

Sei nun $f = \chi_{]-\infty,\lambda_0]}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}\langle f(T)x \,|\, y\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{]-\infty,\lambda_0]}(\lambda) \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, y\rangle = \int_{-\infty}^{\lambda_0} 1 \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, y\rangle \\ &= \langle E(\lambda_0)x \,|\, y\rangle - \langle 0x \,|\, y\rangle = \langle E(\lambda_0)x \,|\, y\rangle\end{aligned}$$

Also

$$f(T) = \chi_{]-\infty,\lambda_0]}(T) = E(\lambda_0).$$

Für eine Borelmenge M definieren wir: $E(M) := \chi_M(T)$. Da $\chi_M^2(\lambda) = \chi_M(\lambda)$ und $\chi_M(\lambda) \in \mathbb{R}$ gilt $E(M)^2 = E(M)$ und $E(M)^* = E(M)$. Daraus folgt:

(i) $E(M)$ ist ein Projektionsoperator.

(ii) Seien M_n, M Borelmengen, $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, $M_n \cap M_k = \emptyset \ \forall n \neq k$. Dann gilt

$$E(M)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)x \quad \forall x \in H.$$

(Dies rechnet man über die Definitionen nach.)

(iii) Wir setzen $E(\emptyset) = 0$. Es ist $E(\mathbb{R}) = \mathrm{id}$.

Eine Abbildung $M \mapsto E(M)$ der Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{L}(H)$ mit diesen Eigenschaften heißt *Spektralmaß*. D. h., mit Hilfe der Spektralzerlegung erhalten wir das Spektralmaß.

Satz IV. 2. 13. Sei $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ mit Spektralzerlegung $T = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE(\lambda)$. $\{E(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ sei Spektralschar von T. Für $A \in \mathcal{L}(H)$ sind äquivalent:

(i) $AT = TA$

(ii) $Af(T) = f(T)A \; \forall f \in B(\sigma(T))$

(iii) $AE(\lambda) = E(\lambda)A \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: **(i)⇒(ii)** Sei $AT = TA$. Dann: $AT^2 = (TA)T = T^2A$. Per Induktion: $T^nA = AT^n$. Somit: $p(T)A = Ap(T)$ für Polynome p. Mit gleichmäßigem Limes: $f(T)A = Af(T) \; \forall f \in C(\sigma(T))$. durch Limes $\underset{b}{\rightarrow}$ folgt Behauptung für $f \in B(\sigma(T))$.

(ii)⇒(iii) Setze $f_{\lambda_0}(\lambda) = \chi_{]-\infty,\lambda_0]}(\lambda)$: $AE(\lambda_0) = E(\lambda_0)A$.

(iii)⇒(i)

$$\begin{aligned}
\langle TAx \,|\, y\rangle &= \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\,\langle E(\lambda)Ax \,|\, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\,\langle AE(\lambda)x \,|\, y\rangle \\
&= \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\,\langle E(\lambda)x \,|\, A^*y\rangle = \langle Tx \,|\, A^*y\rangle \\
&= \langle ATx \,|\, y\rangle \qquad \forall x, y \in H
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \; TA = AT$. //

Bemerkung IV. 2. 2. Für welche Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$ gilt ein Spektraltheorem? D. h., wann ist $T = \int_{\mathbb{C}} z \, dE(z)$ mit einem Spektralmaß? — Wenn $TT^* = T^*T$, d. h. T normal ist.

g. Polarzerlegung beschränkter Operatoren

Für komplexe Zahlen gilt: $\mathbb{C} \ni z \neq 0$, $z = |z| \, e^{i\varphi} = e^{i\varphi} \, |z|$, wobei $|z| \geq 0$ und $\left|e^{i\varphi p}\right| = 1$, $\varphi \in [0, 2\pi[$. $|z|$ und φ sind durch z eindeutig bestimmt. Dann: $|z| \geq 0$ ist positiver selbstadjungierter Operator, $e^{i\varphi}$ ist unitärer Operator, z ist beliebiger Operator mit $\ker z = 0$. Wir suchen nach einem Analogon im Hilbertraum: $T = U\,|T|$.

Definition IV. 2. 14 *(partielle Isometrie)*. Sei H ein Hilbertraum, H_1 und K_1 seien Unterräume. Dann gilt $K_1 \oplus K_1^\perp = H = H_1 \oplus H_1^\perp$ nach 1. Satz von Riesz (Satz I. 4. 7). Sei U ein Operator von H in H mit

(i) U bildet H_1 isometrisch auf K_1 ab

(ii) $Uy = 0 \; \forall y \in H_1^\perp$.

Dann ist $U \in \mathcal{L}(H)$ und heißt *partielle Isometrie*. H_1 heißt *Anfangsbereich* und K_1 *Endbereich*. $U^*U = P_{H_1}$ und $UU^* = P_{K_1}$. ♡

Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. T^*T ist selbstadjungiert (denn $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$) und positiv ($\langle T^*Tx \,|\, x\rangle = \langle Tx \,|\, Tx\rangle \geq 0$). Daher gibt es die Quadratwurzel $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Definition IV. 2. 15 *(Betrag)*. $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ heißt *Betrag* des Operators T. ♡

Satz IV. 2. 16 *(über die Polarzerlegung)*. Es sei $T \in \mathcal{L}(H)$.

(i) Es gibt eine partielle Isometrie U_T mit Anfangbereich $\overline{|T|(H)}$ und Endbereich $\overline{T(H)}$ und $T = U_T\,|T|$. Es ist $\ker U_T = \ker T = \ker |T|$.

(ii) Wenn V eine partielle Isometrie ist mit $\ker V = \ker T$ und S ein positiver selbstadjungierter Operator mit $T = VS$, dann ist $V = U_T$ und $S = |T|$.

Beweis: (i)

$$\begin{aligned} \||T|\,x\|^2 &= \langle |T|\,x \,|\, |T|\,x\rangle = \left\langle |T|^2\,x \,|\, x\right\rangle \\ &= \left\langle T^*Tx \,|\, x\right\rangle = \langle Tx \,|\, Tx\rangle \\ &= \|Tx\|^2 \end{aligned}$$

d. h. $\||T|\,x\| = \|Tx\|$. Wir definieren $U_T(|T|\,x) = Tx$, dann gilt $\|U_Ty\| = \|y\| \;\; y \in |T|\,(H)$. Wir erweitern U_T stetig auf $\overline{|T|\,(H)}$ und setzen $U_Tz = 0\;\forall z \in \left(\overline{|T|\,(H)}\right)^{\perp}$. Dann ist U_T eine partielle Isometrie und $U_T\,|T|\,x = Tx\;\forall x \in H$. $\ker T = \ker |T|$, weil $\||T|\,x\| = \|Tx\|$.

$$\ker U_T = \left(\overline{|T|\,(H)}\right)^{\perp} = \ker |T| = \ker T.$$

(ii) Sei $T = VS$. Dann

$$T^*T = S^*V^*VS = S\underbrace{V^*V}_{\substack{=\text{id auf}\\ S(H)}}S.$$

$\Rightarrow T^*T = S^2$, $S^* = S$, $S \geq 0$, nach Eindeutigkeit der Wurzel ist $S = (T^*T)^{\frac{1}{2}} = |T|$. Also $U_T = V$. //

Bemerkung IV. 2. 3. (i) $|T + S|$ ist im allgemeinen nicht kleiner als $|T| + |S|$.

(ii) Aus $|T| \leq |S|$ folgt i. a. nicht $|T|^2 \leq |S|^2$. Allerdings folgt aus $|T|^2 \leq |S|^2$ stets: $|T|^\alpha \leq |S|^\alpha \;\; \forall \alpha \in \,]0, 2[$. (Kato-Heinz-Ungleichung).

Beispiel IV. 2. 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann: $|A + B| \nleq |A| + |B|$. ✓

Wenn $A = A^*$, $B = B^*$, $AB = BA$, dann folgt aus $|A| \leq |B|$ stets: $|A|^n \leq |B|^n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

— *finis* —

Literaturverzeichnis

[1] Achiezer, N. I. und I. M. Glazman: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*. Akademie-Verlag, Berlin, 8. Aufl., 1981.

[2] Conway, J.B.: *A course in functional analysis*. No. 96 in *Graduate texts in mathematics*. Springer, Berlin; Heidelberg [u. a.], 2nd ed., 1990, ISBN 3-540-97245-5, 0-387-97245-5.

[3] Franz, W.: *Allgemeine Topologie*, Bd. 6181 d. Reihe *Sammlung Göschen*. de Gruyter, Berlin, 4., verb. und erw. Aufl., 1973, ISBN 3-11-004117-0.

[4] Heuser, H.: *Functional analysis*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, Chichester [u. a.], 1982, ISBN 0-471-28052-6, 0-471-10069-2.

[5] Riesz, F. and B. Szökefalvi-Nagy: *Functional analysis*. Ungar, New York, 5th print. ed., 1971, ISBN 0-8044-4821-3,1971.

[6] Rinow, W.: *Lehrbuch der Topologie*, Bd. 79 d. Reihe *Hochschulbücher für Mathematik*. Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 1975, ISBN 3-8171-1292-0.

[7] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin; Heidelberg; (u. a.), 5., erw. Aufl., 2005, ISBN 3-540-21381-3.

Index

$*$-Algebra, **41**
C^*-Algebra, **42**
ε-Umgebung, **1**
1. Kategorie, **20**
2. Kategorie, **20**

Abbildung
  lineare, **23**
  stetige, **23**
abgeschlossen, **2**
Algebra, **41**

Banachalgebra, **41**
Banachraum, **3**
beschränkt
  lineare Abbildung, **23**
  Menge, **23**
Betrag, **85**

Cauchyfolge, **2**

dicht, **3**
direkte orthogonale Summe, **9**

Eigenelemente, **51**
Eigenwert, **51**

Fourierkoeffizient, **14**
Fourierreihe, **15**
FOURIERtransformation, 25

Graph, **32**
  abgeschlossener, **32**
Grenze
  obere, **58**
  untere, **58**

HÖLDER-Ungleichung, *4*
Halbnorm, **33**
Halbordnung, **33**
Hilbert-Schmidt-Norm, 24

Hilbertraum, **7**

innerer Punkt, **1**
Integrationsformel
  von FOURIER, 26
Involution, **41**
isometrisch, **44**
isometrischer Isomorphismus, **9**

Kategorietheorem
  von BAIRE, *20*
kompakt, **2**
  Menge, **60**
  Operator, **61**
Kondensationsprinzip, *30*
Konvergenz, **2**
  gleichmäßige, **50**
  schwache, **49**, **50**
  starke, **50**

Lemma
  von ZORN, *33*
lineares Funktional, **12**
lokalkompakt, **22**

Metrik, **1**
metrischer Raum, **1**
MINKOWSKI-Ungleichung, *4*
MINKOWSKI-Funktional, **38**

nirgendsdicht, **20**
Norm, **3**
  äquivalent, **5**
normal, **42**
normierter linearer Raum, **3**

offene Menge, **1**
Operator
  adjungierter, **40**
  linearer, **23**
  transponierter, **63**

Operatornorm, **23**
orthogonal, **8**
orthogonale direkte Summe, **9**
orthogonaler Unterraum, **10**
Orthogonalsystem, **13**
Orthonormalsystem, **13**

partielle Isometrie, **84**
Projektion, **11**
Projektionsoperator, **47**

Quadratwurzel, **81**

Raum
 dualer, **26**
reflexiv, **37**
Reihe
 NEUMANN'sche, *54*
relativkompakt, **60**
Resolvente, **51**

Satz
 HILBERT-SCHMIDT'scher Entwicklungs–, *65*
 Erweiterungs– von TIETZE, *74*
 vom abgeschlossenen Graphen, *32*
 von BOLZANO-WEIERSTRASS, 21
 von HAHN-BANACH, *34*
  für komplexe Vektorräume, *36*
 von MAZUR-ORLICZ, *29*
 von RIESZ-FISCHER, *5*
 von RIESZ-SCHAUDER, *63*
 von RIESZ
  erster, *11*
  zweiter, *12*
 von SCHAUDER, *63*
 von der offenen Abbildung, *30*
selbstadjungiert, **42**
separabel, **16**
Skalarprodukt, **6**
Spektralradius, **54**
Spektralschar, **69**
 beschränkte, **69**
Spektraltheorem, *76*
Spektrum, **51**
 Punkt–, **52**
 Rest–, **52**
 stetiges, **52**

stetig
 lineares Funktional, **12**
sublinear, **38**

Teilraum, **2**
Theorem
 closed graph, *32*
 von BANACH-STEINHAUS, 28
Trennungssatz, *39*
trigonometrisches Polynom, **18**

Ungleichung
 CAUCHY-SCHWARZ'sche, *6*
unitär, **44**
unitärer Raum, **6**
Unterraum, **9**

vollständig, **2**, **15**
vollstetig, **61**