

Einführung in die algebraische Topologie

Prof. Herzog, Uni Leipzig

Sommersemester 2005

Vorlesungsmitschrift von Jonas Zimmermann

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitungen	1
1.1	Kategorien und Funktoren	1
1.2	Homotopie	8
2	Homologie von Komplexen	11
2.1	Komplexe	11
2.2	Die lange exakte Homologiesequenz	15
2.3	Kettenhomotopie	22
2.4	Freie Komplexe	26
3	Die singuläre Homologie	27
3.1	Standardsimplizes	27
3.2	Der singuläre Komplex	29
3.3	Die singuläre Homologie eines topologischen Raumes	32
3.4	Spezialfälle	33
3.5	Homotopie-Invarianz	40
3.6	Baryzentrische Unterteilung	46
3.7	Kleine Simplizes und Ausschneidungen	50
3.8	Die MAYER-VIETORIS-Sequenz	55
3.9	Die Ausschneidungseigenschaft polyhedraler Triaden	62
4	Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen	69
4.1	Standardabbildungen zwischen Zellen und Sphären	69
4.2	Homologie von Zellen und Sphären	71
4.3	Lokale Homologie	77
4.4	Grad einer Abbildung	80
5	Die Homologie der Polyeder	89
5.1	Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie	89
5.2	Simpliziale Mannigfaltigkeiten	92
5.3	Kompakte simpliziale Flächen	96
	Index	103

1 Vorbereitungen

1.1 Kategorien und Funktoren

Definition 1.1.1 (Hausdorff-Raum). Ein topologischer Raum X heißt Hausdorff-Raum, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$.

Definition 1.1.2 (Stetige Abbildung). Eine stetige Abbildung ist eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(X) \quad \forall U \in \mathcal{T}(Y).$$

Definition 1.1.3 (Kategorie). Eine Kategorie C besteht aus

(i) einer Klasse von Objekten $|C| = \text{ob}(C)$

(ii) einer Menge

$$\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_C(X, Y) = C(X, Y)$$

von Morphismen für je zwei $X, Y \in |C|$

(iii) einer Abbildung

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

für je drei Objekte $X, Y, Z \in |C|$, welche Morphismenkomposition heißt.

Dabei gelte:

(i) Die Morphismenkomposition ist assoziativ:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

für je drei Morphismen f, g, h , für welche eine der beiden Seiten definiert ist.

(ii) Existenz der identischen Morphismen: Für jedes Objekt $X \in |C|$ gibt es einen Morphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$ mit

$$\text{id}_X \circ f = f \quad \forall Y \in |C| \quad \forall f \in \text{Hom}(Y, X)$$

und

$$f \circ \text{id}_X = f \quad \forall Y \in |C| \quad \forall f \in \text{Hom}(X, Y)$$

(iii) Je zwei Hom-Mengen sind disjunkt:

$$\text{Hom}(X, Y) \cap \text{Hom}(X', Y') = \emptyset \quad \text{für } (X, Y) \neq (X', Y')$$

1 Vorbereitungen

Beispiel 1.1.4. Die Abbildungen $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ und $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x$ sind aus Sicht der Kategorientheorie verschiedene Abbildungen.

Bemerkung 1.1.5 (Eindeutigkeit des identischen Morphismus). (i) Jede Hom-Menge

$$\text{Hom}(X, Y)$$

enthält genau einen identischen Morphismus:

$$\text{id}' = \text{id}' \circ \text{id} = \text{id}$$

(ii) Bezeichnungsweise für die Morphismen $f \in \text{Hom}(X, Y)$:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

X heißt dann Quelle von f und Y Ziel von f .

(iii) $\text{Mor}(C)$ bezeichnet die Klasse aller Morphismen von C .

Beispiel 1.1.6. (i) Die Kategorie Ens der Mengen hat als Objekte die Mengen, als Morphismen die Abbildungen und als Morphismenkomposition die Zusammensetzung.

(ii) Die Kategorie der abelschen Gruppen Ab hat als Objekte die Gruppen, als Morphismen die Gruppenhomomorphismen und als Morphismenkomposition die Zusammensetzung von Abbildungen.

(iii) Die Kategorie Top der topologischen Räume hat als Objekte die topologischen Räume, als Morphismen die stetige Abbildungen und als Komposition die Zusammensetzung.

(iv) Sei C eine quasi-geordnete Menge, d. h. C sei eine Menge mit einer reflexiven und transitiven Relation „ \leq “. Dann definiert C eine Kategorie, die auch mit C bezeichnet wird, mit:

$$|C| = C$$
$$\text{Hom}(X, Y) = \begin{cases} 1\text{-elementige Menge} & \text{falls } X \leq Y \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist umgekehrt C eine Kategorie, für welche $|C|$ eine Menge ist und jede Hom-Menge aus höchstens einem Element besteht, so ist auf diese Weise auf $|C|$ die Struktur einer quasi-geordneten Menge definiert.

(v) Sei G eine Gruppe. Dann definiert G eine Kategorie, die ebenfalls mit G bezeichnet wird, mit

$$|G| = \{e\}$$
$$\text{Hom}(e, e) = G$$

Die Morphismenkomposition ist die Gruppenmultiplikation.

(vi) Die simpliziale Kategorie Δ hat als Objekte die Mengen

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\} \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$|\Delta| = \{[n] \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

Die Morphismen von $\text{Hom}([n], [m])$ sind die schwach monoton steigenden Abbildungen $f: [n] \rightarrow [m]$, d. h. $f(i) \leq f(j)$ für $i \leq j$. Die Komposition ist die Zusammensetzung von Abbildungen.

Definition 1.1.7 (Duale Kategorie). Sei C eine Kategorie. Die zu C duale Kategorie C^{op} ist wie folgt gegeben:

$$|C^{\text{op}}| = |C|$$

$$\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_C(Y, X)$$

$$f \circ_{C^{\text{op}}} g = g \circ_C f$$

Definition 1.1.8 (Produkt von Kategorien). Seien C und D zwei Kategorien. Die Produktkategorie $C \times D$ ist wie folgt definiert:

$$|C \times D| = |C| \times |D|$$

$$\text{Hom}_{C \times D}((X, Y), (X', Y')) := \text{Hom}_C(X, X') \times \text{Hom}_D(Y, Y')$$

$$(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')$$

Definition 1.1.9 (Teilkategorie). Sei C eine Kategorie. Eine Kategorie D heißt Teilkategorie von C , wenn gilt

- (i) $|D| \subseteq |C|$
- (ii) $\text{Hom}_D(X, Y) \subseteq \text{Hom}_C(X, Y) \quad \forall X, Y \in D$
- (iii) Die Komposition von D ist gerade die Einschränkung der Komposition von C .
- (iv) Die identischen Morphismen von D sind auch identische Morphismen von C .

D heißt volle Teilkategorie von C , wenn in (ii) stets das Gleichheitszeichen gilt.

Beispiel 1.1.10. • Die endlich erzeugten abelsche Gruppen sind eine volle Teilkategorie der abelsche Gruppen.

- $\Delta \subseteq \text{Ens}$, nicht voll
- (metrische Räume mit Isometrien) \subseteq (metrische Räume mit Kontraktionen)

Definition 1.1.11 (Spezielle Morphismen). C sei eine Kategorie,

$$f \in \text{Hom}_C(X, Y), \quad g \in \text{Hom}_C(Y, X).$$

Es gelte $f \circ g = \text{id}_Y$.

Dann heißt f linksinvers zu g und g rechtsinvers zu f ; g heißt Schnitt von f und f heißt Retraktion von g .

Ein Isomorphismus ist ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ mit einer Linksinversen $l: Y \rightarrow X$ und einer Rechtsinversen $r: Y \rightarrow X$ (es gilt dann $l = r$).

Ein Monomorphismus $f: X \rightarrow Y$ ist ein Morphismus mit der Eigenschaft, daß für je zwei Morphismen $u, v: Z \rightarrow X$ mit $f \circ u = f \circ v$ gilt $u = v$.

Ein Epimorphismus f von C ist ein Monomorphismus von C^{op} .

1 Vorbereitungen

Aufgabe: man gebe einen Epimorphismus an, der nicht surjektiv ist!

Definition 1.1.12 (Funktor). Seien C und D Kategorien. Ein Funktor $F: C \rightarrow D$ (oder auch kovarianter Funktor) besteht aus

(i) einer Abbildung

$$F: |C| \rightarrow |D|$$

(ii) einer Abbildung

$$F: \text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(D)$$

mit

$$(i) F(\text{Hom}_C(X, Y)) \subseteq \text{Hom}_D(F(X), F(Y))$$

$$(ii) F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \forall f, g \in \text{Mor}(C) \text{ mit Target}(g) = \text{Quelle}(f)$$

$$(iii) F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \forall X \in |C|.$$

Ein Kofunktor oder auch kontravarianter Funktor von C nach D ist ein Funktor

$$C^{\text{op}} \rightarrow D \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ F(X) & \xleftarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

Ein Bifunktor ist ein Funktor der Gestalt

$$C' \times C'' \rightarrow D.$$

Beispiel 1.1.13 (für Funktoren). (i) $\text{id}: C \rightarrow C, X \mapsto X, (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (X \xrightarrow{f} Y)$ ist der identische Funktor.

(ii) Sei C Kategorie und $A \in |C|$. Der zu A gehörige kovariante Hom-Funktor ist der Funktor

$$h_A: C \rightarrow \text{Ens} \\ X \mapsto \text{Hom}(A, X)$$

Auf den Morphismen $f: X \rightarrow X'$ von C ist h_A wie folgt definiert:

$$h_A: \begin{array}{ccc} h_A(X) & \rightarrow & h_A(X') \\ =\text{Hom}(A, X) & & =\text{Hom}(A, X') \\ (A \xrightarrow{\alpha} X) & \mapsto & (A \xrightarrow{f \circ \alpha} X') \end{array}$$

(iii) Seien C eine Kategorie und $A \in |C|$. Der kontravariante Hom-Funktor zu A ist der Funktor

$$h^A: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens} \\ X \mapsto \text{Hom}(X, A) \\ h^A(f): \begin{array}{ccc} h^A(X') & \rightarrow & h^A(X) \\ =\text{Hom}(X', A) & & =\text{Hom}(X, A) \\ (X' \xrightarrow{\beta} A) & \mapsto & (X \xrightarrow{\beta \circ f} A) \end{array}$$

(iv) Sei C eine Kategorie. Dann heißt der Funktor

$$\begin{aligned} \text{Hom} &: C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Ens} \\ &(X, Y) \mapsto \text{Hom}(X, Y) \\ \text{Hom}(f, g) &: \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X', Y') \\ &(X \xrightarrow{\alpha} Y) \mapsto (X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{g} Y') \end{aligned}$$

Hom-Funktor von C .

(v) Wenn wir zwei Gruppen G und H als Kategorien auffassen, dann ist ein Funktor „dasselbe“ wie ein Gruppenhomomorphismus.

(vi) Die Funktoren $\Delta \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Top} \rightarrow \text{Ens}$, die jedes Objekt und jeden Morphismus in sich abbilden, sind Beispiele für Vergiß-Funktoren.

Definition 1.1.14 (Komposition von Funktoren). *Seien $F: C \rightarrow D$ und $G: D \rightarrow E$ Funktoren. Dann heißt der Funktor*

$$\begin{aligned} G \circ F &: C \rightarrow E \\ X &\mapsto G(F(X)) \\ f &\mapsto G(F(f)) \end{aligned}$$

Komposition von F und G .

Die Kategorie der Kategorien wird mit Cat bezeichnet. Die Objekte von Cat sind die Kategorien, die Morphismen die Funktoren.

Definition 1.1.15 (Natürliche Transformation). *Seien $F, G: C \rightarrow D$ Funktoren. Eine natürliche Transformation*

$$\xi: F \rightarrow G$$

ist eine Familie von Morphismen

$$\xi_X: F(X) \rightarrow G(X) \in \text{Mor}(D), \quad X \in |C|,$$

wobei für jedes $f: X \rightarrow X'$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\xi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & \cup & \downarrow G(f) \\ F(X') & \xrightarrow{\xi_{X'}} & G(X') \end{array}$$

Andere Bezeichnung: funktorieller Morphismus. ξ heißt funktioneller Isomorphismus oder auch natürliche Äquivalenz, wenn alle ξ_X Isomorphismen sind.

Die Kategorie $\text{Hom}(C, D)$ der Funktoren von $C \rightarrow D$ hat als Objekte die Funktoren von C nach D und als Morphismen deren natürliche Transformationen.

Beispiel 1.1.16 (Natürliche Transformationen). (i) Für jeden Funktor $F: C \rightarrow D$ definiert die Familie der identischen Morphismen

$$\{F(X) \xrightarrow{\text{id}_X} F(X)\}_{X \in |C|}$$

eine natürliche Transformation, die Identität.

1 Vorbereitungen

- (ii) Seien C eine Kategorie, $A \in |C|$ und $F: C \rightarrow \text{Ens}$ ein Funktor. Weiter sei $a \in F(A)$. Dann hat man wie folgt eine natürliche Transformation:

$$\Phi_a: h_A \rightarrow F$$

Für $X \in |C|$ ist $(\Phi_a)_X$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (\Phi_a)_X: h_A(X) &\rightarrow F(X) \\ &= \text{Hom}(A, X) \\ A \xrightarrow{f} X &\mapsto F(A) \xrightarrow{F(f)} F(X) \mapsto F(f)(a) \end{aligned}$$

Für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} X'$ ist dann das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} h_A(X) & \longrightarrow & F(X) \\ h_A(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ h_A(X') & \longrightarrow & F(X') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \xrightarrow{\alpha} X & \longmapsto & F(\alpha)(a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \xrightarrow{f \circ \alpha} X' & \longmapsto & F(f \circ \alpha)(a) \\ & & = F(f) \circ F(\alpha)(a) \end{array}$$

$$\Phi_a(X)(f) = F(f)(a)$$

- (iii) Seien C eine Kategorie, $A \in |C|$ und $F: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$, $a \in F(A)$. Dann hat man eine natürliche Transformation

$$\begin{aligned} \Phi^a(X): h^A &\rightarrow F \\ \Phi^a(X): h^A(X) &\rightarrow F(X) \\ &= \text{Hom}(X, A) \\ X \xrightarrow{\alpha} A &\mapsto F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(X) \mapsto F(\alpha)(a) \end{aligned}$$

Lemma 1.1.17 (VON YONEDA). Seien $F: C \rightarrow \text{Ens}$ ein Funktor, $A \in |C|$ und $\xi: h_A \rightarrow F$. Dann gibt es genau ein $a \in F(A)$ mit $\xi = \Phi_a$. Es gilt $a = \xi_A(\text{id}_A)$.
(Bemerkung: ξ ist durch den Wert von ξ_A an der Stelle id_A eindeutig festgelegt.)

Beweis. Für $A \xrightarrow{f} X \in \text{Mor}(C)$ gilt

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_A \in h_A(A) & \xrightarrow{\xi_A} & F(A) \\ h_A(f) \downarrow & \cup & \downarrow F(f) \\ h_A(X) & \xrightarrow{\xi_X} & F(X) \end{array}$$

dann gilt

$$\xi_X(h_A(f)(\text{id}_A)) = F(f)(\xi_A(\text{id}_A)) \\ = \xi_X(f) = F(f)(a)$$

Damit ist ξ eindeutig bestimmt. Es ist leicht zu sehen, daß durch $\xi_X(f) = F(f)(a)$ eine natürliche Transformation definiert ist. \square

Definition 1.1.18 (Darstellbare Funktoren). Seien $F: C \rightarrow \text{Ens}$ ein (Ko-)Funktork, $A \in |C|$. Ein Element $a \in F(A)$ heißt universell, wenn die zugehörige natürliche Transformation $\Phi_a: h_A \rightarrow F$ (bzw. $\Phi^a: h^A \rightarrow F$) ein funktorieller Isomorphismus ist. Das Objekt A heißt dann darstellendes Objekt und F heißt darstellbar. (A, a) heißt darstellendes Paar.

Satz 1.1.19 (Eindeutigkeit des darstellenden Paares). Sei $F: C \rightarrow \text{Ens}$ ein darstellbarer Funktor und $a \in F(A)$ ein universelles Element. Dann gilt:

- (i) Zu jedem Objekt $X \in |C|$ und jedem Element $x \in F(X)$ gibt es genau einen Morphismus $f: A \rightarrow X$ mit $F(f)(a) = x$.
- (ii) Ist x ebenfalls universell, so ist f ein Isomorphismus.

Beweis. Zu (i): Nach Voraussetzung ist

$$\Phi_A: \underset{=h_A(X)}{\text{Hom}(A, X)} \rightarrow F(x) \quad A \xrightarrow{f} X \mapsto F(A) \xrightarrow{F(f)} F(X) \mapsto F(f)(a)$$

bijektiv für jedes $X \in |C|$. Zu vorgegebenem $x \in F(X)$ gibt es also genau ein f mit $F(f)(a) = x$.

Zu (ii): Ist auch x universell, so gibt es außerdem genau ein $g: X \rightarrow A \in \text{Mor}(C)$ mit $F(g)(x) = a$.

Es folgt $F(f)(F(g)(x)) = F(f)(a) = x$ und $F(g \circ f)(a) = \dots = a$.

Vergleiche mit $F(\text{id}_X)(x) = x$ bzw. $F(\text{id}_A)(a) = a$. Aus der Eindeutigkeitsaussage von (i) folgt $f \circ g = \text{id}_X$ und $g \circ f = \text{id}_A$. □

Definition 1.1.20 (Algebraische Konstruktionen in Kategorien). (i) Direkte Summe:

Seien $A, B \in |C|$. Sei F der Funktor

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \text{Ens} \\ X &\mapsto \text{Hom}(A, X) \times \text{Hom}(B, X) \\ X \xrightarrow{f} X' &\mapsto (A \xrightarrow{\alpha} X, B \xrightarrow{\beta} X) \mapsto (f \circ \alpha, f \circ \beta) \end{aligned}$$

Ist F darstellbar, so heißt das darstellende Objekt direkte Summe von A und B und wird mit $A \oplus B$ bezeichnet, d. h. nach Definition gibt es ein universelles Element

$$(q_A, q_B) \in F(A \oplus B) = \text{Hom}(A, A \oplus B) \times \text{Hom}(B, A \oplus B)$$

d. h. $q_A: A \rightarrow A \oplus B, q_B: B \rightarrow A \oplus B$, derart, daß die folgende Abbildung für jedes X bijektiv ist:

$$\text{Hom}(A \oplus B, X) \xrightarrow{=} \underset{=\text{Hom}(A, X) \times \text{Hom}(B, X)}{F(X)}$$

$$A \oplus B \xrightarrow{\varphi} X \longmapsto (\varphi \circ q_A, \varphi \circ q_B)$$

Die Aussage, (q_A, q_B) sei ein universelles Element von F , bedeutet:

- (1) $q_A: A \rightarrow A \oplus B, q_B: B \rightarrow A \oplus B$ sind Morphismen von C und heißen natürliche Einbettungen von $A \oplus B$.

1 Vorbereitungen

(2) Für je zwei Morphismen

$$f_A: A \rightarrow X \quad \text{und} \quad f_B: B \rightarrow X$$

gibt es genau einen Morphismus $A \oplus B \xrightarrow{\varphi} X$ mit

$$f_A = \varphi \circ q_A, \quad f_B = \varphi \circ q_B$$

(ii) Direkte Produkte sind die direkten Summen in der dualen Kategorie. Bezeichnung: $A \times B$. Die natürlichen Morphismen

$$p_A: A \times B \rightarrow A, \quad p_B: A \times B \rightarrow B$$

heißen natürliche Projektionen.

Beispiel 1.1.21. In Ens und Top sind die direkten Summen gerade die disjunkten Vereinigungen. Die direkten Produkte in Ens , Top , Ab sind die gewöhnlichen direkten Produkte.

1.2 Homotopie

Bemerkung 1.2.1. Man will stetig ineinander deformierbare Objekte klassifizieren.

Definition 1.2.2 (Homotopie). Seien X, Y topologische Räume. Eine Homotopie von X nach Y ist eine stetige Abbildung

$$F: \begin{array}{l} X \times I \\ = X \times [0,1] \end{array} \rightarrow Y$$

Für jedes $t \in I$ hat man eine stetige Abbildung

$$\begin{array}{l} F_t: X \rightarrow Y \\ x \mapsto F(x, t) \end{array}$$

Anstelle von F bezeichnet man auch die zugehörige Familie

$$\{F_t: X \rightarrow Y\}_{t \in I}$$

als Homotopie.

Definition 1.2.3 (Homotope Abbildungen). Zwei stetige Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen homotop, wenn es eine Familie stetiger Abbildungen

$$F_t: X \rightarrow Y, \quad t \in I$$

gibt mit

$$F_0 = f \quad \text{und} \quad F_1 = g.$$

Man sagt dann auch F ist eine Deformation der Abbildung f in die Abbildung g . Bezeichnung: $f \simeq g$, $F: f \simeq g$.

Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum ($\mathcal{T}(A) = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}(X)\}$). Falls $F_t|_A$ unabhängig von t ist, so heißt F auch Homotopie relativ zu A . Symbolisch $f \simeq g \text{ rel } A$, $F: f \simeq g \text{ rel } A$.

Ist $g = F_1$ außerdem die konstante Abbildung, so heißt F Nullhomotopie und f heißt nullhomotop.

Satz 1.2.4 (Homotopieklassen). Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen. Die Homotopieklasse der stetigen Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

wird mit $[f]$ bezeichnet.

Beweis. reflexiv: Sei $F_t: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) \forall t \in I$. Dann ist F eine Homotopie $F: f \simeq f$.

symmetrisch: Sei $F: f \simeq g: X \times I \rightarrow Y$. Betrachte

$$G: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto F(x, 1 - t),$$

also $G_t = F_{1-t}$. Dann: $G: g \simeq f$ Homotopie.

transitiv: Seien $f, g, h: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen, $F: f \simeq g, G: g \simeq h$. Setze

$$H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto \begin{cases} F(x, 2t) & t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

Also ist H stetig und $H: f \simeq h$. □

Satz 1.2.5. Seien $f, f': X \rightarrow Y$ und $g, g': Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $f \simeq f', g \simeq g'$. Dann gilt $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Beweis. Sei $F: f \simeq f', G: g \simeq g'$. Dann gilt: $H: g \circ f \simeq g' \circ f'$ mit $H_t: G_t \circ F_t$. □

Bemerkung 1.2.6. $[g \circ f]$ hängt allein von den Homotopieklassen von f und g ab. Die Definition

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

ist also korrekt.

Bemerkung 1.2.7 (Homotopie-Kategorie). Die topologischen Räume bilden zusammen mit den Homotopieklassen stetiger Abbildungen eine Kategorie

$$\text{Top}' .$$

Bemerkung 1.2.8. (i) Top' hat die selben Objekte wie Top .

(ii) Es gibt einen Funktor

$$\Pi: \text{Top} \rightarrow \text{Top}'$$

$$X \mapsto X$$

$$X \xrightarrow{f} Y \mapsto [f]$$

genannt *Homotopie-Funktor*.

Bemerkung 1.2.9. (i) Die wichtigste Methode der algebraischen Topologie ist die Konstruktion von Funktoren $\text{Top} \xrightarrow{F} \text{Ab}$. Die meisten dieser Funktoren sind homotopie-invariant. Mit $\Pi(X) \cong \Pi(Y)$ folgt dann $F(X) \cong F(Y)$, genauer hat die Gestalt

$$F = F' \circ \Pi \quad F: \text{Top} \xrightarrow{\Pi} \text{Top}' \xrightarrow{F'} \text{Ab}$$

mit einem Funktor $F': \text{Top}' \rightarrow \text{Ab}$.

1 Vorbereitungen

- (ii) Insbesondere werden Morphismen f von Top , die in Top' Isomorphismen sind, bei F in Isomorphismen abgebildet. Solche Morphismen f heißen *Homotopie-Äquivalenz*:

$$f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\text{Top})$$

heißt Homotopie-Äquivalenz, wenn es einen Morphismus

$$g: Y \rightarrow X \in \text{Mor}(\text{Top})$$

gibt mit

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y \quad g \circ f \simeq \text{id}_X$$

Definition 1.2.10 (Topologische Paare). *Unter einem topologischen Paar versteht man ein Paar (X, A) mit einem topologischen Raum X und einem Unterraum $A \subseteq X$. Die topologischen Paare bilden eine Kategorie*

$$\text{Top}^{(2)},$$

deren Morphismen

$$f: (X, A) \rightarrow (X', A')$$

die stetigen Abbildungen

$$f: X \rightarrow X' \text{ mit } f(A) \subseteq A'$$

sind und deren Komposition die Zusammensetzung von Abbildungen ist.

Definition 1.2.11 (Direkte Summe von Paaren). *Es sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann existiert die direkte Summe in Top :*

$$\bigoplus_{i \in I} X_i = \bigvee_{i \in I} X_i = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

und ist gleich der disjunkten Vereinigung der X_i . Dabei ist $U \subseteq \bigvee_{i \in I} X_i$ genau dann offen, wenn $U \cap X_i$ offen für alle $i \in I$.

Sei $A \subseteq X := \bigoplus_{i \in I} X_i$. Dann ist $(X, A) = \bigoplus_{i \in I} (X_i, A_i)$ die direkte Summe der Paare (X_i, A_i) in $\text{Top}^{(2)}$ mit $A_i = X_i \cap A$.

Definition 1.2.12 (Produkt von Paaren). *Für topologische Paare (X, A) und (Y, B) setzen wir*

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Dies ist nicht das direkte Produkt von (X, A) mit (Y, B) in $\text{Top}^{(2)}$.

Definition 1.2.13 (Homotopie von Paaren). *Zwei Morphismen $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ aus $\text{Top}^{(2)}$ heißen homotop, falls es eine Homotopie $H: f \simeq g: X \rightarrow Y$ gibt, für welche die Abbildungen $H_t: X \rightarrow Y$, $t \in I$, Abbildungen von Paaren $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ sind. Man schreibt dann $f \simeq g$. Die Relation \simeq ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen, die von f wird mit $[f]$ bezeichnet. Man erhält auf diese Weise eine Kategorie $\text{Top}^{(2)'$ und einen Funktor Π mit*

$$\begin{aligned} \Pi: \text{Top}^{(2)} &\rightarrow \text{Top}^{(2)'} \\ (X, A) &\mapsto (X, A) \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

Definition 1.2.14 (Topologische Tripel). *Ein topologisches Tripel (X, A, B) mit einem topologischen Raum X und zwei Teilmengen*

$$B \subseteq A \subseteq X.$$

Gilt nur $A \subseteq X \supseteq B$, so heißt (X, A, B) Triade. In beiden Fällen erhält man Kategorien, welche $\text{Top}^{(2)}$ enthalten.

2 Homologie von Komplexen

2.1 Komplexe

Definition 2.1.1 (Komplex). Ein Komplex ist eine Familie

$$K = \{\partial_n : K_n \rightarrow K_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

von aufeinander folgenden Homomorphismen abelscher Gruppen mit

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$K : \dots \rightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \rightarrow \dots$$

Die Elemente von K_n heißen n -dimensionale Ketten oder n -Ketten.

Die Elemente von

$$Z_n K := \ker(K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1})$$

heißen n -Zyklen, die von

$$B_n K := \text{Im}(K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n)$$

heißen n -Ränder (boundaries).

Wegen $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ gilt

$$B_n K \subseteq Z_n K.$$

Daher kann man $H_n K := Z_n K / B_n K$ definieren und man nennt $H_n K$ die n -te Homologie von K . Zwei Zyklen z, z' heißen homolog, wenn sie dasselbe Element der Homologie-Gruppe repräsentieren. Symbolisch:

$$z \sim z' \iff z - z' \in B_n K \iff \exists c \in K_{n+1} \text{ mit } z - z' = \partial c$$

Die Abbildungen ∂_n heißen Randabbildungen oder Differentiale von K . Ein Komplex K heißt exakt, wenn $\text{Im}(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$, das ist äquivalent zu

$$H_n K = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Alternative Bezeichnungsweise: $K^{-n} = K_n$.

Definition 2.1.2 (Komplexabbildungen). Seien

$$K = \{\partial_n : K_n \rightarrow K_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad K' = \{\partial'_n : K'_n \rightarrow K'_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

zwei Komplexe. Eine Komplexabbildung $f : K \rightarrow K'$ oder auch Kettenabbildung oder auch Komplexmorphismus ist eine Familie

$$f = \{f_n : K_n \rightarrow K'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

2 Homologie von Komplexen

von Homomorphismen abelscher Gruppen mit

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{f_n} & K'_n \\ \partial_n \downarrow & \cup & \downarrow \partial'_n \\ K_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K'_{n-1} \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sind $f: K \rightarrow K'$ und $f': K' \rightarrow K''$ Komplexabbildungen, so ist durch

$$f'_n \circ f_n: K_n \xrightarrow{f_n} K'_n \xrightarrow{f'_n} K''_n \quad \forall n$$

eine Komplexabbildung $f' \circ f: K \rightarrow K''$ definiert. Die Komplexe und Komplexabbildungen bilden mit dieser Komposition eine Kategorie $K(\text{Ab})$.

Bemerkung 2.1.3. Sei $f: K \rightarrow K'$ eine Komplexabbildung, dann gilt

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & K'_{n+1} \\ \partial_{n+1} \downarrow & \cup & \downarrow \partial'_{n+1} \\ K_n & \xrightarrow{f_n} & K'_n \\ \partial_n \downarrow & \cup & \downarrow \partial'_n \\ K_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K'_{n-1} \end{array}$$

Also gilt $f_n(Z_n K) \subseteq Z_n K'$ und $f_n(B_n K) \subseteq B_n K'$. Der Homomorphismus f_n induziert Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} Z_n K & \xrightarrow{Z_n f} & Z_n K' \\ \cup & & \cup \\ B_n K & \xrightarrow{B_n f} & B_n K' \end{array}$$

Mit anderen Worten, man hat Funktoren

$$\begin{aligned} Z_n: K(\text{Ab}) &\rightarrow \text{Ab} \\ B_n: K(\text{Ab}) &\rightarrow \text{Ab} \end{aligned}$$

Außerdem hat man Gruppenhomomorphismen

$$H_n K = Z_n K / B_n K \xrightarrow{H_n f} Z_n K' / B_n K' = H_n K'$$

also hat man für alle n einen Funktor $H_n: K(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$, den *Homologiefunktor*.

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \longrightarrow & K(\text{Ab}) \\ \downarrow & \searrow & \swarrow \downarrow \\ & \text{Ab} & \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \downarrow \\ \text{Top}' & \longrightarrow & K'(\text{Ab}) \end{array}$$

Definition 2.1.4 (Graduierte Gruppen). Eine (\mathbb{Z} -)graduierte Gruppe ist eine Gruppe G , welche in eine direkte Summe von Untergruppen G_n zerfällt:

$$G = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n$$

Die Untergruppe G_n heißt n -ter homogener Bestandteil von G .

Ein Morphismus graduierter Gruppen ist ein Homomorphismus

$$f: G \rightarrow G' \text{ mit } f(G_n) \subseteq G'_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Die graduierten abelschen Gruppen bilden eine Kategorie GAb . Durch

$$[i]: \text{GAb} \rightarrow \text{GAb}, \quad G \mapsto G[i] \text{ mit } G[i]_n = G_{i+n}$$

ist ein Funktor definiert.

Beispiel 2.1.5. (i) Einen Komplex K kann man als graduierte Gruppe $K := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K_n$ betrachten, zusammen mit einem Morphismus $\partial: K \rightarrow K[-1]$ mit

$$\partial \circ \partial = 0, \quad \partial(K_n) \subseteq K_{n-1}, \quad \partial|_{K_n} := \partial_n.$$

(ii) Kern und Bild der Randabbildung ∂ sind dann wieder graduierte Gruppen

$$ZK = \ker(\partial) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Z_n K$$

$$BK = \text{Im}(\partial) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} B_n K$$

(iii) Die Homologie von K ist die Gruppe

$$HK := ZK/BK \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n K$$

Der Übergang zur Homologie definiert einen Funktor

$$H: K(\text{Ab}) \rightarrow \text{GAb}$$

zu jeder abelschen Gruppe $A \in |\text{Ab}|$ und jedem $k \in \mathbb{Z}$ hat man einen Komplex abelscher Gruppen

$$(A, k) \text{ mit } (A, k)_n = \begin{cases} A & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Differentiale von (A, k) sind alle trivial (0). Für jedes k ist durch

$$\text{Ab} \rightarrow \text{GAb}$$

$$A \mapsto (A, k)$$

$$A \xrightarrow{f} B \mapsto \begin{array}{l} \text{Komplexmorphismus} \\ (A, k) \rightarrow (B, k), \\ \text{der im Grad } k \text{ gleich } f \text{ ist} \end{array}$$

ein Funktor definiert.

2 Homologie von Komplexen

Definition 2.1.6 (Direkte Summe von Komplexen). Sei $\{K^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Komplexen. Dann heißt

$$K = \bigoplus_{\lambda} K^\lambda \text{ mit } \partial = \bigoplus_{\lambda} \partial^\lambda$$

direkte Summe der K^λ . K ist graduiert mit $K_n = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_n^\lambda$.

$$\partial_n \underbrace{\{c^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}}_{\in K_n} = \underbrace{\{\partial_n^\lambda c^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}}_{\in K_{n-1}}$$

Es gilt

$$ZK = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} ZK^\lambda$$

$$BK = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} BK^\lambda$$

$$HK = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} HK^\lambda$$

Der Homologiefunktor kommutiert mit direkten Summen.

Definition 2.1.7 (Kegel einer Komplexabbildung). Sei $f: (K', \partial') \rightarrow (K'', \partial'')$ eine Komplexabbildung. Der Kegel Cf über f ist dann definiert als der Komplex mit

$$(Cf)_n := K''_n \oplus K'_{n-1} \text{ und } \partial = \begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix}$$

explizit: $\partial(c'', c') = (\partial'' c'' + f c', -\partial' c')$. Es gilt $\partial \circ \partial = 0$, denn

$$\begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial'' & f \\ 0 & -\partial' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial'' \circ \partial'' & \partial'' \circ f - f \circ \partial' \\ 0 & \partial' \circ \partial' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. h. Cf ist tatsächlich ein Komplex. Spezialfälle:

- (i) $K = K' = K''$, $f = \text{id}$, $C(K) := C(\text{id})$ heißt Kegel von K .
- (ii) $K'' = 0$, $f = 0$, $S(K) := C(f)$ heißt Suspension oder Einhängung.

Bemerkung 2.1.8 (Kurze exakte Sequenz zum Abbildungskegel). Sei $f: K' \rightarrow K''$ eine Komplexabbildung. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K'' \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{k} K'[-1] \rightarrow 0$$

$= K'' \oplus K'[-1]$

mit $i(c'') = (c'', 0)$ und $k(c'', c') = c'$.

- (i) $\text{Im}(i) = \ker(k)$
- (ii) Diese Sequenz zerfällt als Sequenz von graduierten abelschen Gruppen, jedoch im allgemeinen nicht als Sequenz von Komplexen.

Bsp.: $K'' = K' = (\mathbb{Z}, 0)$, $f = \text{id}$.

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}, 0) \rightarrow (\mathbb{Z}, 0) \oplus (\mathbb{Z}, 0)[-1] \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)[-1] \rightarrow 0$$

2.2 Die lange exakte Homologiesequenz

Definition 2.2.1 (Zerfallende exakte Sequenzen). Sei

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Diese bilden Kategorie, wobei die Morphismen die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sind. Beispiel: $0 \rightarrow A' \xrightarrow{q} A' \oplus A'' \xrightarrow{p} A'' \rightarrow 0$ mit $p(a', a'') = a''$, $q(a') = (a', 0)$. Eine kurze exakte Sequenz heißt zerfallend, wenn sie isomorph ist zu einer Sequenz dieser Gestalt.

Definition 2.2.2 (Teilkomplexe und Faktorkomplexe). Seien K und K' zwei Komplexe. Falls

$$K'_n \subseteq K_n \quad \text{und} \quad \partial_n|_{K'_n} = \partial'_n$$

gilt (d. h. die Randabbildung von K eingeschränkt auf K' ist gerade die Randabbildung von K'), heißt K' Teilkomplex von K .

Wegen $\partial_n(K'_n) \subseteq K'_{n-1}$ induziert

$$\partial_n: K_n \rightarrow K_{n-1} \quad (\rightarrow K_{n-1}/K'_{n-1})$$

einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n: K_n/K'_n &\rightarrow K_{n-1}/K'_{n-1} \\ c + K'_n &\mapsto \partial_n(c) + K'_{n-1} \end{aligned}$$

Aus der Definition von $\bar{\partial}_n$ liest man ab, es gilt $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$, d. h. die $\bar{K}_n := K_n/K'_n$ bilden mit $\bar{\partial}_n$ einen Komplex \bar{K} . Dieser Komplex heißt Faktorkomplex von K modulo K' .

Beispiel für Teil- und Faktorkomplexe

Sei $f: K \rightarrow K'$ eine Komplexabbildung. Dann heißt der Komplex $\ker(f)$ mit

$$\begin{aligned} \ker(f)_n &:= \ker(f_n: K_n \rightarrow K'_n) \\ \partial_n^{\ker(f)} &= \partial_n^k|_{\ker(f)_n} \end{aligned}$$

Kern von f . Dies ist tatsächlich ein Komplex:

$$\partial_n^{\ker(f)}(\ker(f)_n) \subseteq \ker(f)_{n-1}$$

denn

$$\begin{array}{ccc} c \in \ker(f)_n \subseteq K_n & \xrightarrow{f_n} & K'_n \ni 0 \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \partial'_n \downarrow \\ 0 \in \ker(f)_{n-1} \subseteq K_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & K'_{n-1} \ni 0 \end{array}$$

2 Homologie von Komplexen

Für die zugrundeliegenden Gruppen gilt

$$K/\ker(f) \cong \text{Im}(f).$$

Eine Sequenz von Komplexabbildungen

$$\dots \rightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \rightarrow \dots$$

heißt *exakt an der Stelle K*, wenn der Komplex $\ker(\beta)$ gleich dem Komplex $\text{Im}(\alpha)$ ist. Eine Sequenz heißt *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist.

Beispiel: Seien K ein Komplex, $L \subseteq K$ ein Teilkomplex. Dann ist

$$0 \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow K/L \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Komplexen.

Satz 2.2.3 (Homologiefunktor ist halbexakt). *Sei*

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Dann ist die Sequenz

$$HK' \xrightarrow{H\alpha=\alpha_*} HK \xrightarrow{H\beta=\beta_*} HK''$$

exakt.

Beweis. Z. z.: $\text{Im}(\alpha_*) = \ker(\beta_*)$. Nach Voraussetzung gilt $\text{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$, also $\beta \circ \alpha = 0$, also $\beta_* \circ \alpha_* = (\beta \circ \alpha)_* = 0_* = 0$, also $\text{Im}(\alpha_*) \subseteq \ker(\beta_*)$.

Noch z. z.: „ \supseteq “. Sei $[z] \in H_n K$. Es gelte $\beta_*([z]) = 0$. Also z. z.: $[z] \in \text{Im}(\alpha_*)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 K'_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & K_{n+1} \ni k & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & k'' \in K''_{n+1} \\
 \downarrow \partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial'' \\
 B'_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & b'' \in B''_n \\
 \cap & & \cap & & \cap \\
 Z'_n & & \tilde{z} \in Z_n \ni z & & Z''_n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & K'_n & \xrightarrow{\alpha_n} & K_n & \xrightarrow{\beta_n} & K''_n \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \\
 & & & * * [r] B_{n-1} \subseteq K_{n-1} & &
 \end{array}$$

Nimm $\tilde{z} := z - \partial(k)$. Es gilt $[z] = [\tilde{z}]$. Dann gilt $\beta_n(\tilde{z}) = \beta(z - \partial(k)) = b'' - b'' = 0$. Also $\tilde{z} = \alpha_n(k')$ für ein $k' \in K'_n$. Problem: ist k' ein Zykel?

$$\alpha(\partial'(k')) = \partial(\alpha(k')) = \partial(\tilde{z}) = \partial(z - \partial(k)) = 0 - 0 = 0,$$

d. h. $k' \in Z'_n$, d. h. $[k'] \in H_n K'$ wohldefiniert. Es gilt

$$\text{Im}(\alpha_*) \ni \alpha_*([k']) = [\alpha(k')] = [\tilde{z}] = [z]$$

□

2 Homologie von Komplexen

z. z.: $\bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([z'']))$ besteht aus genau einem Element. β induziert eine Surjektion

$$\beta^{-1}(Z_n K'') \rightarrow Z_n K''$$

Also ist $\bar{\beta}$ Surjektion. Also ist $\bar{\partial}(\bar{\beta}^{-1}([z'']))$ nicht leer. Seien nun $c, d \in \bar{\beta}^{-1}([z''])$. Z. z.: $\bar{\partial}(c) = \bar{\partial}(d)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & H_n K'' \\ & & & \nearrow \bar{\beta} & \uparrow \\ K'_{n-1} & & & & \\ \uparrow & & & & \\ K'_n & \xrightarrow{\alpha} & \beta^{-1}(Z_n K'') & \xrightarrow{\beta} & Z_n K'' \end{array}$$

Es gilt $\bar{\beta}(c) = z'' = \bar{\beta}(d)$, d. h. $\bar{\beta}(c - d) = 0$, d. h. $\partial''(e'') = \beta(c - d) \in B_n K''$ mit $e'' \in K''_{n+1}$.
 $\beta: K \rightarrow K''$ surjektiv $\Rightarrow e'' = \beta(e)$, $e \in K_{n+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \beta(c - d - \partial(e)) &= \beta(c - d) - \beta(\partial(e)) = \beta(c - d) - \partial''(\beta(e)) \\ &= \partial''(e'') - \partial''(e'') = 0 \end{aligned}$$

d. h. $c - d - \partial(e) \in \ker \beta = \text{Im } \alpha$, d. h. $c - d - \partial(e) = \alpha(f')$ mit $f' \in K'_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(\partial''(f')) &= \partial(\alpha(f')) = \partial(c - d - \partial(e)) \\ &= \partial(c) - \partial(d) - \partial(\partial(e)) \\ &= \partial(c) - \partial(d) \end{aligned}$$

$$\partial' f' = \alpha^{-1}(\partial(c) - \partial(d)) = \alpha^{-1}(\partial(c)) - \alpha^{-1}(\partial(d)) \Rightarrow \bar{\partial}(c) = \bar{\partial}(d).$$

Beschreibung von δ_n :

2.2.5, 22.4.05

Bemerkung 2.2.5 (Funktorialität). Sei

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen (Komplexmorphismen), die Zeilen seien exakt. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_n K'' & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1} K' \\ f'_* = H_n f'' \downarrow & & \downarrow H_n f' = f'_* \\ H_n L'' & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1} L' \end{array}$$

Mit anderen Worten: die Zusammenhangshomomorphismen bilden „natürliche Transformation“:

$$H_n K'' \rightarrow H_{n-1} K'.$$

Satz 2.2.6 (Exaktheit der langen Homologiesequenz). Sei

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexmorphismen.

Dann ist

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_n K' \xrightarrow{\alpha_*} H_n K \xrightarrow{\beta_*} H_n K'' \xrightarrow{\delta} H_{n-1} K' \rightarrow \dots \rightarrow H_0 K'' \rightarrow 0$$

Beweis. (Die Exaktheit bei $H_n K$ ist schon gezeigt.)

1. Schritt: $\text{Im}(\delta) \subseteq \ker(\alpha_*)$.

Ein Element aus dem Bild von δ hat die Gestalt

$$[\alpha^{-1}(\delta(x))] \text{ mit } \beta(x) \in HK''.$$

Anwenden von α_* liefert:

$$\alpha_*[\alpha^{-1}(\delta(x))] = [\alpha\alpha^{-1}\delta(x)] = [\delta x] = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_* \circ \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(\delta) \subseteq \ker \alpha_*.$$

2. Schritt: $\ker(\alpha_*) \subseteq \text{Im}(\delta)$.

Liege $[z'] \in H_n K'$ im Kern von α_* , d. h.

$$\alpha_*[z'] = 0 = [\alpha(z')]$$

$\Rightarrow \alpha(z')$ ist Rand: $\alpha(z') = \partial(c)$ mit $c \in K$. Es gilt $\partial''(\beta(c)) = \beta(\partial(c)) = \beta(\alpha(z')) = 0$, $\Rightarrow \beta(c)$ ist Zyklus, definiert also ein

$$[\beta(c)] \in H_n K''$$

Es gilt

$$\delta[\beta(c)] = [\alpha^{-1}(\partial(c))] = [\alpha^{-1}(\alpha(z'))] = [z']$$

3. Schritt: $\text{Im}(\beta_*) \subseteq \ker(\delta)$.

Für $[z] \in H_n K$ gilt:

$$\delta(\beta_*([z])) = \delta([\beta z]) = [\alpha^{-1}(\underbrace{\partial(z)}_{=0})] = [\alpha^{-1}[0]] = [0] = 0$$

Also $\delta \circ \beta_* = 0$.

4. Schritt: $\ker(\delta) \subseteq \text{Im}(\beta_*)$.

Liege $[z'']$ im Kern von δ , d. h. $\exists c \in K$ mit

$$[z''] = [\beta c] \quad \text{und} \quad [\alpha^{-1}(\partial(c))] = 0 \in H_{n-1} K'$$

Die zweite Bedingung bedeutet:

$$\alpha^{-1}(\partial(c)) = \partial'(c') \text{ mit } c' \in K'$$

Es gilt

$$\partial(c - \alpha(c')) = \partial c - \alpha(\partial'(c')) = 0$$

$\Rightarrow c - \alpha(c')$ definiert ein $[c - \alpha(c')] \in H_n K$. Es gilt

$$\beta_*[c - \alpha(c')] = [\beta c - \beta(\alpha(c'))] = [\beta(c)] = [z'']$$

$\Rightarrow [z''] \in \text{Im}(\beta_*)$. □

2 Homologie von Komplexen

Definition 2.2.7 (Quasi-Isomorphismen). Ein Komplexmorphismus $f: K \rightarrow K'$ heißt Quasi-Isomorphismus, wenn die Abbildungen

$$H_n f: H_n K \rightarrow H_n K'$$

Isomorphismen sind.

Beispiel:

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Komplexmorphismen mit exakten Zeilen. Sind zwei der Komplexmorphismen f', f, f'' Quasi-Isomorphismen, so gilt dasselbe für den dritten.

Beweis. Seien o. B. d. A. f' und f'' Quasi-Isomorphismen. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1} K'' & \longrightarrow & H_n K' & \longrightarrow & H_n K & \longrightarrow & H_n K'' & \longrightarrow & H_{n-1} K' \\ \cong \downarrow f'' & & \cong \downarrow f' & & \downarrow f & & \cong \downarrow f'' & & \cong \downarrow f' \\ H_{n+1} L'' & \longrightarrow & H_n L' & \longrightarrow & H_n L & \longrightarrow & H_n L'' & \longrightarrow & H_{n-1} L' \end{array}$$

Die Isomorphie von f_* folgt aus dem Fünferlemma. □

Definition 2.2.8 (Zerfallende exakte Sequenzen). Ein Komplex von Komplexen

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \rightarrow 0$$

(d. h. K, K', K'' sind Komplexe, α, β Komplexabbildungen und $\beta \circ \alpha = 0$) zerfällt in jeder Dimension, wenn für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow K'_n \xrightarrow{\alpha_n} K_n \xrightarrow{\beta_n} K''_n \rightarrow 0$$

eine zerfallende exakte Sequenz ist.

Satz 2.2.9 (Der Zusammenhangshomomorphismus für zerfallende Komplexe). Sei

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \rightarrow 0 \quad (*)$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen, die in jeder Dimension zerfällt, d. h. es gebe $\forall n$ Grpphenomorphismen, α'_n, β'_n mit

$$\alpha'_n \circ \alpha_n = \text{id}, \quad \beta_n \circ \beta'_n = \text{id}, \quad \alpha_n \circ \alpha'_n + \beta'_n \circ \beta_n = \text{id}.$$

Dann setzen sich die Homomorphismen

$$d_n = \alpha'_n \circ \partial_n \circ \beta'_n: K''_n \rightarrow K'_{n-1} = (K'^+)_n$$

(mit $K^+ = C(0: K \rightarrow 0)$) zu einem Komplex-Morphismus

$$d: K'' \rightarrow K'^+$$

zusammen. Die von d auf der Homologie erzeugte Abbildung

$$d_* = H_n d: H_n K'' \rightarrow H_n K'^+ = H_{n-1} K'$$

ist der Zusammenhangshomomorphismus zu (*).

Beweis. d kommutiert mit der Randabbildung:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\partial'(d)) &= \alpha(\partial'(\alpha'(\partial(\beta')))) = \partial \circ \alpha \circ \alpha' \circ \partial \circ \beta' \\
 &= \partial \circ (\text{id} - \beta' \circ \beta) \circ \partial \circ \beta' = \partial\partial\beta' - \partial\beta'\beta\partial\beta' \\
 &= -\partial\beta'\partial'' \underbrace{\beta\beta'}_{=\text{id}} \\
 &= -\partial\beta'\partial'' \\
 &= -(\alpha \circ \alpha' + \beta' \circ \beta) \circ \partial\beta'\partial'' \\
 &= -\alpha \circ \alpha' \circ \partial \circ \beta' \circ \partial'' - \beta' \beta \partial\beta' \partial'' \\
 &= -\alpha d\partial'' - \beta' \partial'' \underbrace{\beta\beta' \partial''}_{=\text{id}} \\
 &= -\alpha d\partial'' \\
 \alpha\partial'd &= -\alpha d\partial''
 \end{aligned}$$

α ist injektiv $\Rightarrow -\partial'd = d\partial''$, d. h. d ist Komplexabbildung. □

Beispiel

Seien $f: K \rightarrow K'$ ein Komplexmorphismus und

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow[\text{=K}' \oplus \text{K}[-1]]{\alpha} C(f) \xrightarrow{\beta} K[-1] \rightarrow 0 \tag{*}$$

mit $\alpha(c') = (c', 0)$ und $\beta(c', c) = c$ die zugehörige exakte Sequenz. Der zugehörige Zusammenhangshomomorphismus ist gerade

$$Hf: HK \rightarrow HK'$$

Beweis. (*) zerfällt in jedem Grad: Schnitt von β :

$$\beta': K[-1] \rightarrow C(f), \quad c \mapsto (0, c)$$

Retraktion von α :

$$\alpha': C(f) \rightarrow K', \quad (c', c) \mapsto c'$$

Nach 2.2.9 wird der Zusammenhangshomomorphismus induziert durch die Abbildung

$$K \rightarrow K', \quad c \mapsto (0, c) \mapsto \begin{pmatrix} \partial' & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fc \\ -\partial c \end{pmatrix} \mapsto fc$$

□

Satz 2.2.10 (Kriterium für Quasi-Isomorphie). *Sei $f: K \rightarrow K'$ ein Komplexmorphismus. Dann sind äquivalent:*

- (i) $Hf: HK \rightarrow HK'$ ist ein Isomorphismus.
- (ii) $H(C(f)) = 0$

2 Homologie von Komplexen

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K' \rightarrow C(f) \rightarrow K[-1] \rightarrow 0$$

und die zugehörige lange Homologiesequenz:

$$H_n K \xrightarrow{Hf} H_n K' \rightarrow H_n(C(f)) \rightarrow H_{n-1} K \xrightarrow{Hf} H_{n-1} K' \rightarrow H_{n-1}(C(f))$$

(ii) ⇒ (i)

Wegen

$$0 \rightarrow H_{n-1} K \xrightarrow{Hf} H_{n-1} K' \rightarrow 0$$

ist Hf ein Isomorphismus.

(i) ⇒ (ii)

Folgende Sequenz ist exakt:

$$H_n K' \xrightarrow{0'} H_n(C(f)) \xrightarrow{0} H_{n-1} K$$

$$0 = \text{Im}(0') = \ker(0) = H_n(C(f))$$

□

2.3 Kettenhomotopie

Definition 2.3.1 (Homotope Kettenabbildungen). Seien $f, g: K \rightarrow K'$ zwei Komplexabbildung. Eine Homotopie s von f nach g ist eine Familie

$$s = \{s_n: K_n \rightarrow K'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

von Gruppenhomomorphismen mit

$$\partial'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Bezeichnung: $f \simeq g$ bzw. $s: f \simeq g$.

Bemerkung:

(i) Die Homotopie von Komplexabbildungen ist eine Äquivalenzrelation:

$$\begin{array}{ll} \text{reflexiv:} & 0: f \simeq f \\ \text{symmetrisch:} & s: f \simeq g \Rightarrow -s: g \simeq f \\ \text{transitiv:} & s: f \simeq g, t: g \simeq h \Rightarrow s+t: f \simeq h \end{array}$$

(ii) Die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen, diejenige von f wird mit $[f]$ bezeichnet.

Satz 2.3.2 (Verträglichkeit mit der Komposition). Seien

$$f, f': K \rightarrow K' \quad \text{und} \quad g, g': K' \rightarrow K''$$

Komplexmorphisme mit $f \simeq f', g \simeq g'$.

Dann gilt

$$g \circ f \simeq g' \circ f'$$

Beweis. Seien $s: f \simeq f'$ und $t: g \simeq g'$. Es gilt:

$$f - f' = \partial' s + s\partial \quad g - g' = \partial'' t + t\partial'$$

also

$$\begin{aligned} g \circ (f - f') &= g \circ f - g \circ f' && (g_n \text{ Homomorphismen}) \\ &= g\partial' s + gs\partial \\ &= \partial''(gs) + (gs)\partial && (g \text{ Komplexmorphismus}) \end{aligned}$$

d. h. $gs: g \circ f \simeq g \circ f'$.

Analog:

$$(g - g') \circ f' = g \circ f' - g' \circ f' = \partial t f' + t \partial f' = \partial t f' - (t f') \partial$$

und daher $t f': g \circ f' \simeq g' \circ f'$. Zusammen:

$$g \circ f \simeq g' \circ f'.$$

□

Definition 2.3.3 (Homotopiekategorie über $K(\text{Ab})$). Die Komplexe abelscher Gruppen bilden zusammen mit den Homotopieklassen der Komplexabbildungen eine Kategorie

$$K'(\text{Ab})$$

mit der Komposition

$$[g] \circ [f] := [g \circ f].$$

Man hat einen Funktor

$$\begin{aligned} K(\text{Ab}) &\rightarrow K'(\text{Ab}) \\ f &\mapsto [f] \\ K &\mapsto K. \end{aligned}$$

Eine Komplexabbildung $f: K \rightarrow K'$, für welche $[f]$ ein Isomorphismus ist, heißt Homotopie-Äquivalenz. Falls ein solches f existiert, heißen K und K' homotopieäquivalent. Ein Komplex K , dessen identische Abbildung $\text{id}: K \rightarrow K$ homotop ist zur Nullabbildung $0: K \rightarrow K$ heißt kontrahierbar.

Satz 2.3.4 (Homologie homotoper Komplexmorphismen). Seien $f, g: K \rightarrow K'$ homotop. Dann gilt

$$Hf = Hg: HK \rightarrow HK'$$

Beweis. Sei $s: f \simeq g$, d. h. $f - g = \partial s + s\partial$ für $[z] \in H_n K$. Dann gilt

$$Hf[z] = [fz] \quad Hg[z] = [gz]$$

$$[fz] - [gz] = [fz - gz] = [\partial s(z) + \underbrace{s \partial(z)}_{=0}] = [\partial s(z)] = 0 \quad \square$$

2 Homologie von Komplexen

Satz 2.3.5 (Homologie einer Homotopie-Äquivalenz). Sei $f: K \rightarrow K'$ eine Homotopie-Äquivalenz. Dann ist

$$f_* = Hf: HK \rightarrow HK'$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Voraussetzung besitzt $[f]$ einen inversen Morphismus $[g]$, d. h.

$$f \circ g \simeq \text{id} \quad g \circ f \simeq \text{id}$$

d. h. $Hf \circ Hg = Hf \circ Hg = H \text{id} = \text{id}$, $Hg \circ Hf = Hg \circ Hf = H \text{id} = \text{id}$, d. h. Hf und Hg sind zueinander invertierbar. \square

Satz 2.3.6 (Kriterium für Kontrahierbarkeit). Sei K ein Komplex mit $HK = 0$. Dann sind äquivalent:

- (i) K ist kontrahierbar
- (ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ ist $Z_n K$ ein direkter Summand von K_n

Beweis. Wir nehmen die exakte Sequenz graduerter abelscher Gruppen:

$$0 \rightarrow ZK \rightarrow K \xrightarrow{\partial} BK \rightarrow 0 \quad (*)$$

(i) \Rightarrow (ii) Nach Voraussetzung ist $\text{id} \simeq 0$, d. h. $\text{id}_K = \text{id}_K - 0 = \partial s + s\partial$ mit Homotopie s . Durch Einschränken auf BK

$$\text{id}_{BK} = \partial s|_{BK}$$

d. h. $s|_{BK}$ ist Schnitt von ∂ , d. h. (*) zerfällt:

$$K = ZK \oplus sBK$$

(ii) \Rightarrow (i) ZK ist nach Voraussetzung direkter Summand von K , d. h. die natürliche Einbettung $i: ZK \rightarrow K$ besitzt eine Retraktion.

$$i': K \rightarrow ZK \quad i' \circ i = \text{id}_{ZK}$$

Also zerfällt (*) und ∂ besitzt einen Schnitt

$$t: BK \rightarrow K \quad \partial \circ t = \text{id}_{BK}$$

$$\Rightarrow K = ZK \oplus tBK = BK \oplus tBK$$

Wir müssen nun eine Homotopie von id_K nach 0_K konstruieren, d. h. einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen

$$s: K \rightarrow K[+1]$$

Es genügt, s auf jedem der beiden direkten Summanden BK und tBK zu definieren. Wir setzen

$$s = \begin{cases} t & \text{auf } BK \\ 0 & \text{auf } tBK \end{cases}.$$

Auf BK gilt:

$$\partial s + s\partial = \partial \circ t + 0 = \text{id}_{BK} = \text{id} - 0$$

Auf tBK gilt:

$$\partial \circ s + s \circ \partial = s \circ \partial = t \circ \partial = \text{id}$$

(Für $\alpha \in tBK$ gilt $\alpha = t(\beta)$, also $t \circ \partial \circ \alpha = t \circ \partial \circ t(\beta) = t(\beta) = \alpha$, d. h. auf tBK ist $t \circ \partial = \text{id}$.)

□

29.4.05

Satz 2.3.7 (Kontrahierbarkeit des Kegels und Homotopie-Äquivalenz). *Ist der Kegel der Komplexabbildung $f: K \rightarrow K'$ kontrahierbar, so ist f eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Z. z.:

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} K[-1] \rightarrow 0$$

- (i) Ist die Einbettung $u: K' \rightarrow C(f)$, $c' \mapsto (c', 0)$ nullhomotop, so besitzt f eine rechte Homotopieinverse $h: K' \rightarrow K$, d. h. $h \circ f \simeq \text{id}$
- (ii) Ist die Projektion $p: C(f) \rightarrow K[-1]$, $(c', c) \mapsto c$ nullhomotop, so besitzt f eine linke Homotopieinverse.

Zu (i):

Sei $s: i \simeq 0$. Dann hat s die Gestalt

$$s(c') = \begin{pmatrix} g(c') \\ -\partial c \end{pmatrix}$$

mit Abbildungen $g: K' \rightarrow K'$, $h: K' \rightarrow K$. Es gilt $C(f) = K' \oplus K[-1]$ in GAb. Wegen

$$i = \partial s + s\partial$$

gilt

$$i \begin{pmatrix} c' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(c') \\ h(c') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\partial c') \\ h(\partial c') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\partial c') + fh(c') + g\partial(c') \\ -\partial h(c') + h(\partial(c')) \end{pmatrix}$$

$$\partial h = h\partial \tag{*}$$

$$\partial g + g\partial = \text{id} - fh \tag{**}$$

Wegen (*) ist h eine Komplexabbildung, wegen (**) ist h eine rechte Homotopieinverse zu f .

Zu (ii):

Sei $T: p \simeq 0$. Dann hat T die Gestalt

$$T \begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} = g(c) + h(c')$$

mit Homomorphismen $g: K \rightarrow K$, $h: K' \rightarrow K$.

2 Homologie von Komplexen

Wegen $p = \partial T + T\partial$ und mit $\partial^+ = -\partial^k$ gilt

$$\begin{aligned} c &= \partial \left(T \begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} \right) + T \left(\begin{pmatrix} \partial & f \\ 0 & -\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ c \end{pmatrix} \right) \\ &= \partial g(c) + \partial h(c') + \begin{pmatrix} \partial c' + fc \\ -\partial c \end{pmatrix} \\ &= \partial g(c) + \partial h(c') + g(-\partial c) + h(\partial c' + fc) \\ &= \partial h(c') + h\partial(c') + \partial g(c) - g\partial(c) + h(f(c)) \end{aligned}$$

Also:

$$\partial h = h\partial^{-1} \quad (*)$$

$$\partial^+ g + g\partial = hf - \text{id} \quad (**')$$

Nach $(*)$ ist h Komplexmorphismus, nach $(**')$ linke Homotopieinverse zu f . \square

2.4 Freie Komplexe

Definition 2.4.1. Ein Komplex K von abelschen Gruppen heißt frei, wenn $\forall n$ K_n eine freie abelsche Gruppe ist, d. h. isomorph zu einer direkten Summe von Exemplaren von \mathbb{Z} .

Satz 2.4.2 (Zyklen bilden direkten Summanden). Sei K freier Komplex. Dann ist für jedes q die Untergruppe $Z_q K$ der q -Zyklen ein direkter Summand von K .

Beweis. Als Untergruppe von K ist BK eine freie abelsche Gruppe. Betrachte

$$0 \rightarrow ZK \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\partial} BK[-1] \rightarrow 0$$

Weil BK frei ist, besitzt ∂ einen Schnitt. Man suche zu jedem Basiselement von $BK[-1]$ ein Urbild bei ∂ und setze die gefundene Abbildung \mathbb{Z} -linear auf ganz $BK[-1]$ fort. Die Sequenz zerfällt (in jedem Grad), d. h. $Z_n K$ ist direkter Summand von K_n . \square

Satz 2.4.3 (Quasi-Isomorphie und Homotopie-Äquivalenz). Sei $f: K \rightarrow K'$ ein Komplexmorphismus mit K und K' frei. Ist f ein Quasi-Isomorphismus, so ist f eine Homotopie-Äquivalenz.

Beweis. Nach 2.3.7 reicht es z. z. $C(f) \simeq 0$, $C(f)$ ist kontrahierbar. Nach 2.3.6 reicht z. z.:

(i) $HCf = 0$ und

(ii) $Z(f)$ ist direkter Summand von $C(f)$.

(i) folgt aus der langen Homologiesequenz zu

$$0 \rightarrow K' \rightarrow C(f) \rightarrow K^+ \rightarrow 0$$

und aus der Quasi-Isomorphie von f .

(ii) gilt, weil $C(f)$ frei ist (vgl. 2.4.2). \square

Bemerkung:

Ist $f: K \rightarrow K'$ frei:

$C(f)$ kontrahierbar $\Rightarrow f$ Homotopie-Äquivalenz $\Rightarrow f$ Quasi-Isomorphie

3 Die singuläre Homologie

3.1 Standardsimplizes

Bemerkung 3.1.1 (Ziel). Konstruktion eines Funktors

$$S : \text{Top} \rightarrow K(\text{Ab})$$

Definition 3.1.2 (Standardsimplex). Sei q eine nichtnegative ganze Zahl, dann heißt

$$\Delta_q = \left\{ x = \{x_0, \dots, x_q\} \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

Standardsimplex der Dimension q oder q -Simplex.

Vereinbarung: $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \dots, \cup \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\infty, e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
 i -te Koordinate

Behauptung:

e_i sind die einzigen Punkte in Δ_q , die nicht im Innern einer ganz in Δ_q liegenden Strecke liegen. Sie heißen Ecken.

Beweis. Seien $u, v \in \Delta_p$ und e_i liege im Innern der Strecke von u nach v :

$$\begin{aligned} e_i &= tu + (1-t)v & t \in (0, 1) \\ tu_j + (1-t)v_j &= 0 & \text{für } j \neq i \\ tu_i + (1-t)v_i &= 1 \end{aligned}$$

Da $u, v \in \Delta_q, u_j = 0 = v_j \Rightarrow u_i = 1 = v_i \Rightarrow u = v = e_i$. □

Definition 3.1.3 (Lineare Abbildung). Eine Abbildung $f: \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt linear, wenn es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $g: \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$g|_{\Delta_q} = f$$

gibt.

Bemerkung

- (i) Zu je $q + 1$ Punkten $p_0, \dots, p_q \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f: \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(e_i) = p_i \forall i = 0, \dots, q$, nämlich

$$f(x_0, \dots, x_q) = \sum_{i=0}^q x_i p_i$$

Es gilt:

$$\text{Im}(f) = \left\{ \sum_{i=0}^q x_i p_i \mid \sum x_i = 1, 0 \leq x_i \right\}$$

3 Die singuläre Homologie

- (ii) Eine lineare Abbildung auf Δ_q ist durch ihre Werte auf den Ecken eindeutig bestimmt. Die Werte kann man beliebig vorgeben.

Definition 3.1.4 (Randabbildung). Die j -te Randabbildung des Δ_q ist die lineare Abbildung

$$\varepsilon^j = \varepsilon_q^j: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$$

$$\varepsilon^j(e_i) = \begin{cases} e_i & i < j \\ e_{i+1} & j \leq i \end{cases}$$

ε^j ist die einzige lineare Abbildung $\Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$, welche die Ecken in Ecken abbildet und die natürliche Ordnung erhält und bei der die j -te Ecke nicht im Bild vorkommt. ε^j identifiziert Δ_{q-1} mit der Seite, die e_j gegenüberliegt.

$$\eta_q^j: \Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q$$

sei die lineare Abbildung mit

$$\eta_q^j(e_i) := \begin{cases} e_i & \text{für } i \leq j \\ e_{i-1} & \text{für } j < i \end{cases}$$

η^j ist die einzige surjektive lineare Abbildung $\Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q$, die Ecken in Ecken abbildet und die Reihenfolge der Ecken erhält, wobei die j -te und die $j+1$ -te Ecke dasselbe Bild haben.

Satz 3.1.5 (Relationen zwischen ε^j und η^j). Es bestehen folgende Relationen:

- (i) $\varepsilon^j \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i \circ \varepsilon^{j-1}$ falls $i < j$
- (ii) $\eta^j \circ \eta^i = \eta^i \circ \eta^{j+1}$ falls $i \leq j$
- (iii) $\eta^j \circ \varepsilon^i = \begin{cases} \varepsilon^i \eta^{j-1} & \text{falls } i < j \\ \text{id} & \text{falls } i = j, i = j+1 \\ \varepsilon^{i-1} \eta^j & \text{falls } j+1 < i \end{cases}$

Beweis. Für (i):

$$v < j: e_v \mapsto e_v \mapsto e_v$$

$$i \leq v < j-1: e_v \mapsto e_{v+1} \mapsto e_{v+1}; \quad e_v \mapsto e_v \mapsto e_{v+1}$$

$$j-1 \leq v: e_v \mapsto e_{v+1} \mapsto e_{v+2}; \quad e_v \mapsto e_{v+1} \mapsto e_{v+2}$$

□

Bemerkungen

- (i) Jede weitere Relation zwischen den ε und η ist eine Folge der oben angegebenen.
- (ii) Jede lineare Abbildung $\Delta_n \rightarrow \Delta_m$, die Ecken in Ecken überführt und die natürliche Ordnung der Ecken erhält, läßt sich auf genau eine Weise in der Gestalt $\alpha = \varepsilon \circ \eta$ mit ε injektiv, η surjektiv schreiben mit

$$\varepsilon = \varepsilon^{i_1} \circ \dots \circ \varepsilon^{i_s} \qquad 0 \leq i_s \leq \dots \leq i_1 \leq n$$

$$\eta = \eta^{j_1} \circ \dots \circ \eta^{j_t} \qquad 0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_t \leq m$$

- (iii) Die ε und η bilden Ecken in Ecken ab und erhalten die Ordnung der Ecken und sind eindeutig bestimmt durch Werte auf den Ecken. Man kann sie also mit den zugehörigen Abbildungen der Eckenmengen identifizieren, d. h. mit Morphismen der Kategorie Δ (wobei man e_i und i identifiziert). Umgekehrt induzieren die Morphismen der Kategorie Δ

$$f: [n] \rightarrow [m]$$

lineare Abbildungen von $\Delta_n \rightarrow \Delta_m$

$$e_i \rightarrow e_{f(i)}$$

die Ecken in Ecken abbilden und die Ordnung der Ecken erhalten. Man bekommt auf diese Weise alle Abbildungen dieser Art.

Auf diese Weise kann man Δ identifizieren mit der Kategorie, deren Objekte die Standard-simplizes Δ_n und deren Morphismen lineare Abbildungen sind, die Ecken in Ecken abbilden und die Ordnung erhalten.

- (iv) Zur Definition eines (Ko-)Funktors

$$F: \Delta \rightarrow \text{Ens} \quad \text{bzw.} \quad F: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$$

reicht es, die Werte

$$F([n]), F(\varepsilon_q^j), F(\eta_q^j)$$

anzugeben, wobei die Relationen, die sich aus denen von 3.1.5 ergeben, erfüllt sein müssen. Insbesondere kann man auf diese Weise simpliziale Mengen konstruieren.

3.2 Der singuläre Komplex

Bemerkung 3.2.1. Ziel ist die Konstruktion eines Funktors

$$S: \text{Top} \rightarrow K(\text{Ab})$$

Definition 3.2.2 (singuläres q -Simplex). Sei X ein topologischer Raum. Ein q -dimensionales singuläres Simplex (q -Simplex) von X ist eine stetige Abbildung

$$\sigma: \Delta_q \rightarrow X$$

$S_q X$ bezeichne die freie abelsche Gruppe, die von allen q -Simplizes $\Delta_q \rightarrow X$ erzeugt wird. Jedes Element von $S_q X$ läßt sich schreiben als

$$c = \sum_{\substack{\sigma: \Delta_q \rightarrow X \\ q\text{-Simplex}}} c_\sigma \sigma \quad c_\sigma \in \mathbb{Z}, c_\sigma = 0 \text{ für fast alle } \sigma$$

Die Elemente von $S_q X$ heißen singuläre q -Ketten von X . Ist $c_\sigma \neq 0$ nur für ein σ und ist für dieses σ $c_\sigma = 1$, so werden wir c mit der Abbildung σ identifizieren.

Definition 3.2.3 (Randoperator, singulärer Komplex).

$$\partial_q: S_q X \rightarrow S_{q-1} X$$

∂_q soll ein Gruppenhomomorphismus sein. Da $S_q X$ eine freie abelsche Gruppe ist, reicht es, die Bilder der singulären q -Simplizes anzugeben. Für jedes q -Simplex $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ setzen wir

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ \varepsilon^j$$

Die $S_q X$ bilden mit den ∂_q einen Komplex. Dieser wird mit SX bezeichnet und heißt singulärer Komplex von X .

Lemma 3.2.4 (Komplex-Eigenschaft von SX). Es gilt

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$$

Beweis. Es reicht z. z.

$$\partial_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma: \Delta_q \rightarrow X$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \partial \partial \sigma &= \partial \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ \varepsilon^j \right) \\ &= \sum_j (-1)^j \partial(\sigma \circ \varepsilon^j) \\ &= \sum_j (-1)^j \sum_k (-1)^k \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k \\ &= \sum_{j \leq k} (-1)^{j+k} \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k + \sum_{j > k} (-1)^{j+k} \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k \\ &= \sum_{j \leq k} (-1)^{j+k} \sigma \circ \varepsilon^j \circ \varepsilon^k + \sum_{j \geq k} (-1)^{j+k+1} \sigma \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^j \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Definition 3.2.5 (Abbildung der singulären Ketten zu einer stetigen Abbildung). Sei $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung. Dann bezeichne

$$S_q f: S_q X \rightarrow S_q Y$$

die folgende Abbildung:

$$\sum_{\substack{\sigma: \Delta_q \rightarrow X \\ \text{stetig}}} c_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\substack{\sigma: \Delta_q \rightarrow Y \\ \text{stetig}}} c_\sigma (f \circ \sigma)$$

Nach Konstruktion gilt für je zwei stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$

$$S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f), \quad S_q(\text{id}) = \text{id}_{S_q X}.$$

Satz 3.2.6 (Verträglichkeit mit der Randabbildung). Für jede stetige Abbildung

$$f: X \rightarrow Y$$

gilt

$$\partial^Y \circ S_q(f) = S_q(f) \circ \partial^X \quad \text{d. h.} \quad \begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{S_q(f)} & S_q Y \\ \partial^X \downarrow & \cup & \downarrow \partial^Y \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{S_{q-1}(f)} & S_{q-1} Y \end{array}$$

d. h. die $S_q(f)$ setzen sich zu einem Komplex-Morphismus

$$S(f): SX \rightarrow SY \quad \sum c_\sigma \sigma \mapsto \sum c_\sigma f \circ \sigma$$

zusammen.

Beweis. Es gilt für jedes q -Simplex $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} \text{links:} & \quad \partial(S_q(f)(\sigma)) = \partial(f \circ \sigma) = \sum (-1)^j (f \circ \sigma) \circ \varepsilon^j \\ \text{rechts:} & \quad S_{q-1}(f)(\partial\sigma) = S_{q-1}(f)\left(\sum (-1)^j \sigma \circ \varepsilon^j\right) \\ & \quad = \sum (-1)^j f \circ (\sigma \circ \varepsilon^j) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.7 (Funktorialität). Die Zuordnungen $X \rightarrow SX, f \mapsto Sf$ definieren einen Funktor

$$S: \text{Top} \rightarrow K(\text{Ab})$$

Bemerkung 3.2.8 (Verallgemeinerung auf topologische Paare). Sei (X, A) ein topologisches Paar. $i: A \rightarrow X$ bezeichne die natürliche Einbettung. Diese induziert eine Injektion

$$Si: SA \rightarrow SX,$$

d. h. wir können SA als Teilkomplex von SX auffassen, Bezeichnung

$$S(X, A) := SX/SA$$

heißt *singulärer Komplex des Paares* (X, A) . Seine Elemente heißen *singuläre Ketten von X modulo A* . Damit erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Komplexen:

$$0 \rightarrow SA \xrightarrow{Si} SX \rightarrow \underset{=S(X,A)}{SX/SA} \rightarrow 0. \quad (*)$$

(*) zerfällt in jedem Grad: SX wird erzeugt von zwei Arten von singulären Simplexes:

- (i) Simplexes von A
- (ii) Simplexes von X ohne A .

3 Die singuläre Homologie

Die erste Art erzeugt gerade SA , die zweite erzeugt eine Untergruppe $S'(X, A)$ von SX , die sich isomorph auf $S(X, A)$ abbildet.

$$S_q X = S_q A \oplus S'_q(X, A) \cong S_q A \oplus S_q(X, A)$$

Nach Konstruktion gilt $S(X, \emptyset) = SX$. Eine stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{Si_A} & SX & \longrightarrow & S(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow S f|_A & \cup & \downarrow S f & & \downarrow \overline{S f} \\ 0 & \longrightarrow & SB & \xrightarrow{Si_B} & SY & \longrightarrow & S(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Abbildung $\overline{S f}$ ist die nach dem Homomorphiesatz existierende und eindeutig bestimmte Abbildung, die das rechte Viereck kommutativ macht.

$$\left[\sum_{\sigma: \Delta_q \rightarrow X} c_\sigma \sigma \right] \mapsto \left[\sum_{\sigma: \Delta_q \rightarrow X} c_\sigma (f \circ \sigma) \right]$$

3.3 Die singuläre Homologie eines topologischen Raumes

Definition 3.3.1 (Singuläre Homologie). Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt

$$H_n X := H_n(SX)$$

n -te singuläre Homologie von X . Sei (X, A) ein topologisches Paar. Dann heißt

$$H_n(X, A) := H_n(S(X, A))$$

n -te singuläre Homologie des Paares (X, A) . Bezeichnung:

$$HX := HSX = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n X$$

$$H(X, A) := HS(X, A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X, A)$$

Eine Kette $z \in SX$ heißt Zyklus modulo A , wenn $\partial z \in SA$ gilt. Eine Kette $b \in SX$ heißt Rand modulo A , wenn gilt $b = \partial x + u$ mit $x \in SX, u \in SA$.

Es gilt dann

$$H_n(X, A) \cong \frac{\{n\text{-Zyklen mod } A\}}{\{n\text{-Ränder mod } A\}}$$

Bedenke $(A/C)/(B/C) \cong A/B$.

Bemerkung 3.3.2 (Funktorialität). Für jede Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ topologischer Paare hat man eine Komplex-Abbildung

$$S f: S(X, A) \rightarrow S(Y, B)$$

und damit einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen

$$f_* = Hf: H(X, A) \rightarrow H(Y, B).$$

H ist ein Funktor

$$H: \text{Top}^{(2)} \xrightarrow{S} K(\text{Ab}) \xrightarrow{H} \text{GAb}$$

Definition 3.3.3 (Lange Homologiesequenz). Sei (X, A) ein topologisches Paar. Dann heißt die zu

$$0 \rightarrow SA \xrightarrow{Si} SX \xrightarrow{j} S(X, A) \rightarrow 0$$

gehörige lange exakte Homologiesequenz

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_q A \xrightarrow{i_*} H_q X \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{q-1} A \rightarrow \dots$$

lange Homologiesequenz des Paares (X, A) . Für jede stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von topologischen Paaren hat man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H_q A & \xrightarrow{i_*} & H_q X & \xrightarrow{j_*} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1} A & \longrightarrow & \dots \\ & & (f|_A)_* \downarrow & \cup & f_* \downarrow & \cup & f_* \downarrow & \cup & \downarrow (f|_A)_* & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H_q B & \xrightarrow{i_*} & H_q Y & \xrightarrow{j_*} & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1} B & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Sei (X, B, A) ein topologisches Tripel $(X \supseteq B \supseteq A)$. Dann gilt $SA \subseteq SB \subseteq SX$, genauer:

$$SA \xrightarrow{S\alpha} SB \xrightarrow{S\beta} SX \quad \text{mit } \alpha: A \hookrightarrow B \text{ und } \beta: B \hookrightarrow X.$$

Damit entsteht eine kurze exakte Sequenz von Komplexmorphismen.

$$0 \rightarrow SB/SA \xrightarrow{=S(B,A)} SX/SA \xrightarrow{=S(X,A)} SX/SB \xrightarrow{=S(X,B)} 0.$$

Die zugehörige lange Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_q(B, A) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, B) \rightarrow H_{q-1}(B, A) \rightarrow \dots$$

heißt lange Homologiesequenz des Tripels (X, B, A) . Zu jeder Abbildung

$$f: (X, A, B) \rightarrow (Y, C, D)$$

topologischer Tripel gehört analog ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.

3.4 Spezialfälle

Bemerkung 3.4.1 (Einpunktraum $P = \{p\}$). Sei $P = \{p\}$ der einpunktige Raum. Für jedes q gibt es genau ein singuläres q -Simplex

$$\tau_q: \Delta_q \rightarrow P.$$

Die j -te Seite von τ_q ist gerade $\tau_{q-1} = \tau_q \circ \varepsilon^j$. Damit gilt:

$$\partial\tau_q = \begin{cases} 0 & q \text{ ungerade} \\ \tau_{q-1} & q \text{ gerade} \end{cases}$$

3 Die singuläre Homologie

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 SP : & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}\tau_{2q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\tau_{2q-1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\tau_{2q-2} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}\tau_1 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}\tau_0 & \xrightarrow{0} & 0 \\
 & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \cdots & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow H_q P \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.4.2 (Reduzierte Homologie). Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum und

$$\gamma = \gamma^X: X \rightarrow P$$

die einzige Abbildung. γ^X heißt Augmentation von X , ebenfalls die induzierte Abbildung

$$H\gamma: HX \rightarrow HP = \mathbb{Z}.$$

Die graduierte abelsche Gruppe $\tilde{H}X := \ker H\gamma$ heißt reduzierte Homologie von X , ihr n -ter Bestandteil n -te reduzierte Homologie

Bemerkungen:

(i) $\tilde{H}_q X = H_q X$ für $q \neq 0$

(ii) Mit $f: X \rightarrow Y$ stetig haben wir kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tilde{H}X & \longrightarrow & HX & \longrightarrow & HP \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f_* & \cup & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{H}Y & \longrightarrow & HY & \longrightarrow & HP \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$\Rightarrow \tilde{H}_q$ definiert einen Funktor $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ der nichtleeren topologischen Räume in die abelschen Gruppen.

(iii) Sei $x \in X$. Dann haben wir stetige Abbildungen

$$P \xrightarrow{i} X, p \mapsto x \quad X \xrightarrow{\gamma} P, x \mapsto p$$

mit $\gamma \circ i = \text{id}$, also $H\gamma \circ Hi = H(\text{id}) = \text{id}$, d. h.

$$0 \longrightarrow \tilde{H}X \longrightarrow HX \begin{array}{c} \xrightarrow{H\gamma} \\ \xleftarrow{Hi} \end{array} HP \longrightarrow 0$$

ist kurz, exakt und zerfallend (als graduierte abelsche Gruppe). Insbesondere ist

$$H_0 X = \tilde{H}_0 X \oplus \mathbb{Z}.$$

Satz 3.4.3 (Reduzierte Homologiesequenz eines Paares). Sei (X, A) ein topologisches Paar mit $A \neq \emptyset$. Dann hat man eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q A \rightarrow \tilde{H}_q X \rightarrow \tilde{H}_q(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{q-1} A \rightarrow \cdots$$

welche reduzierte Homologiesequenz von (X, A) heißt.

Beweis. Wir wählen eine Inklusion $i: P \rightarrow A$ und fassen diese als Paarabbildung auf:

$$i: (P, P) \rightarrow (X, A)$$

Betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q P & \longrightarrow & H_q P & \longrightarrow & H_q(P, P) \longrightarrow H_{q-1} P \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow i_* & \uparrow \gamma_* & \downarrow i_* & \uparrow \gamma_* & \downarrow i_* \uparrow \gamma_* \\ \dots & \longrightarrow & H_q A & \longrightarrow & H_q X & \longrightarrow & H_q(X, A) \longrightarrow H_{q-1} A \longrightarrow \dots \end{array}$$

Die Augmentation liefert Paarabbildung

$$\gamma: (X, A) \rightarrow (P, P), \quad \gamma \circ i = \text{id}, \quad \gamma_* \circ i_* = \text{id}$$

Die Abbildungen γ_* sind linksinvers zu den i_* . \Rightarrow Die obere Zeile ist ein direkter Summand der unteren Zeile. Durch Weglassen dieses direkten Summanden erhält man die gesuchte exakte Sequenz. □

Definition 3.4.4 (Augmentation in $K(\text{Ab})$). Sei X topologischer Raum, $X \neq \emptyset$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \eta^X &= S_\gamma^X: SX \rightarrow SP = (\mathbb{Z}, 0) \\ \sigma: \Delta_q &\rightarrow X \mapsto 0 \quad \text{für } q > 0 \\ \sigma: \Delta_0 &\rightarrow X \mapsto \Delta_0 \rightarrow P = 1 \end{aligned}$$

Augmentation von SX .

(i) Man kann P als Unterraum von X auffassen. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{H}X \xleftarrow{r} HX \xleftarrow[\begin{smallmatrix} Hi \\ H\gamma \end{smallmatrix}]{r} HP \longrightarrow 0 \tag{*}$$

vergleichen wir mit der Homologiesequenz von (X, P) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_1 X & \longrightarrow & H_1(X, P) \xrightarrow{0} & H_0 P & \xrightarrow{Hi} H_0 X \longrightarrow H_0(X, P) \longrightarrow 0 \\ & & & & & \text{id} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{id} \\ & & & & & H_0 P & \xrightarrow{Hi} & H_0 X \xrightarrow{r} \tilde{H}_0 X \end{array}$$

Wir erhalten einen Isomorphismus

$$H_0(X, P) \rightarrow \tilde{H}_0 X,$$

dieser ist funktoriell. Für einen Grad $q > 0$ erhalten wir:

$$H_q P \xrightarrow{=0} H_q X \rightarrow H_q(X, P) \xrightarrow{0} H_{q-1} P$$

Wir erhalten einen funktoriellen Isomorphismus

$$\tilde{H}_q X = H_q X \rightarrow H_q(X, P)$$

3 Die singuläre Homologie

(ii) Vergleich der Augmentationen:

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{S(\gamma)} & SP \\ \eta^X \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \eta^P \\ & (\mathbb{Z}, 0) & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} HX & \xrightarrow{H\gamma} & HP \\ \eta_*^X \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \eta_*^P \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Da η_*^P Isomorphismus ist, folgt $\tilde{H}X = \ker(H\gamma) = \ker(H\eta_*^X)$.

Satz 3.4.5 (Homologie der konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n). Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere konvexe Teilmenge. Dann ist

$$\eta^X: SX \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$$

eine Homotopie-Äquivalenz. Insbesondere gilt $\tilde{H}X = 0$.

Beweis (Kegelkonstruktion). Sei $p \in X$ ein Punkt. Zu jedem q -Simplex $\sigma_q: \Delta_q \rightarrow X$ definieren wir ein $(q+1)$ -Simplex

$$p \cdot \sigma_q: \Delta_{q+1} \rightarrow X$$

$$(p \cdot \sigma_q)(x_0, \dots, x_{q+1}) := \begin{cases} p & \text{für } x_0 = 1 \\ x_0 \cdot p + (1 - x_0)\sigma_q\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{q+1}}{1-x_0}\right) & \text{für } x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Wir können nun P linear fortsetzen: $P = P_q: S_q X \rightarrow S_{q+1} X$. Es gilt:

$$(p \cdot \sigma_q) \circ \varepsilon^i(x_0, \dots, x_q) = (p \cdot \sigma_q)(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_q)$$

für $i = 0$: $(p \cdot \sigma_q) \circ \varepsilon^0 = \sigma_q$

$$\begin{aligned} \text{für } q, i > 0: \quad & x_0 p + (1 - x_0)\sigma_q\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_{i-1}}{1-x_0}, 0, \frac{x_i}{1-x_0}, \dots, \frac{x_q}{1-x_0}\right) \\ & = x_0 p + (1 - x_0)(\sigma_q \circ \varepsilon^{i-1}\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_q}{1-x_0}\right)) \\ \Rightarrow & (p \cdot \sigma_q) \circ \varepsilon^i = p \cdot (\sigma_q \circ \varepsilon^{i-1}) \end{aligned}$$

Für $q = 0, i = 1$ betrachten wir die Komplexabbildung

$$\hat{p}: (\mathbb{Z}, 0) \rightarrow SX, \quad \mathbb{Z} \ni m \mapsto m \cdot p \quad \text{mit } p: \Delta_0 \rightarrow X, e_0 \mapsto p$$

Dann gilt

$$(p \cdot \sigma_0) \circ \varepsilon^1 = (\hat{p}\eta)(\sigma_0)$$

Dies gibt

- (i) $\partial_{q+1} \circ p_q = \text{id} - p_{q-1} \circ \partial_q$ für $q > 0$
- (ii) $\partial_1 \circ p_0 = \text{id} - (\hat{p} \circ \eta)_0$

Zusammen:

$$\begin{aligned}\partial_{q+1} \circ p_q + p_{q-1} \circ \partial_q &= \text{id} - \hat{p} \circ \eta \\ \Rightarrow \hat{p} \circ \eta &\cong \text{id}\end{aligned}$$

trivialerweise gilt $\eta \circ \hat{p} = \text{id}$:

$$\begin{aligned}SP &\xrightarrow{=} SX \xrightarrow{=} SP \\ \underset{=Z}{=} & & \underset{=Z}{=} \\ mp &\mapsto mp \mapsto mp\end{aligned}$$

\hat{p} und η induzieren auf der Homologie zueinander inverse Abbildungen, also ist

$$H\eta: HX \rightarrow HP = \mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus, $\Rightarrow \tilde{H}X = \ker(H\eta) = 0$. □

Korollar 3.4.6 (Relative und reduzierte Homologie von $Y \subseteq \mathbb{R}^n$). Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge. Dann ist der Zusammenhangshomomorphismus

$$\tilde{H}_q \mathbb{R}^n \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n, Y) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{q-1} Y \rightarrow \tilde{H}_{q-1} \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Nach 3.4.5 ist $\tilde{H} \mathbb{R}^n = 0$. Die lange reduzierte Homologiesequenz des Paares (\mathbb{R}^n, Y) liefert die Behauptung. □

Definition 3.4.7 (Linear zusammenhängende Räume). Ein topologischer Raum X heißt linear zusammenhängend oder wegzusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte durch einen Weg verbinden lassen, d. h. $\forall x, y \in X \exists$ stetige Abbildung

$$\omega: I \rightarrow X \quad \text{mit } \omega(0) = x, \omega(1) = y$$

Wir definieren Relation für $x, y \in X$:

$xRy \iff \exists$ stetige Abbildung $\omega: I \rightarrow X$ mit $\omega(0) = x$ und $\omega(1) = y$. R ist Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation heißen lineare Komponenten von X .

Sei $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ die Familie der Komponenten. Dann gilt $X = \dot{\bigcup}_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Jedes X_λ ist linear zusammenhängend und eine maximale linear zusammenhängende Teilmenge von X . Jede linear zusammenhängende Teilmenge von X liegt ganz in einem X_λ .

13. 05. 2005

Satz 3.4.8. $H_0 X = \mathbb{Z}$ für X wegzusammenhängend und nichtleerer topologischer Raum.

Beweis. Sei $p \in X$ fest gewählt. Wir betrachten:

$$\hat{p}: (\mathbb{Z}, 0) \rightarrow SX, \quad m \mapsto m \underset{=\Delta_0}{p}$$

Es gilt

$$\eta \circ \hat{p} = \text{id} \quad (*)$$

3 Die singuläre Homologie

Für jedes 0-Simplex $\sigma_0: \Delta_0 \rightarrow X$ (das entspricht der Wahl eines Punktes x) fixieren wir ein 1-Simplex $\pi(\sigma_0): \Delta_1 \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned}\pi(\sigma_0) \circ \varepsilon^0 &= \sigma_0 \\ \pi(\sigma_0) \circ \varepsilon^1 &= p\end{aligned}$$

Ein solches 1-Simplex existiert, weil X wegzusammenhängend ist. Es gilt (nur für Grad 0):

$$\partial(\pi(\sigma_0)) = \sigma_0 - p = (\text{id} - \hat{p} \circ \eta)(\sigma_0),$$

d. h. $\partial \circ \pi = \text{id} - \hat{p} \circ \eta$ für Ketten des Grades 0. Deshalb induziert die Abbildung $\hat{p} \circ \eta$ auf der nullten Homologie die identische Abbildung

$$\begin{aligned}H(\hat{p} \circ \eta)[z] &= [(\hat{p} \circ \eta)(z)] = [(\text{id} - \partial\pi)(z)] && (**) \\ &= [z - \underbrace{\partial(\pi(z))}_{\text{Rand}}] = [z]\end{aligned}$$

für 0-Zyklen z .

Zusammen haben wir mit (*) und (**) gezeigt:

$$H(\hat{p}): H((\mathbb{Z}, 0)) \rightarrow HX \quad \text{und} \quad H\eta: HX \rightarrow H((\mathbb{Z}, 0))$$

sind zueinander invers. □

Satz 3.4.9 (Die 0-te Homologie und lineare Komponenten). *Seien X ein topologischer Raum, $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sei die Familie der linearen Komponenten von X und $A \subseteq X$ Unterraum und*

$$A_\lambda := X_\lambda \cap A.$$

Dann induzieren die natürlichen Inklusionen

$$i_\lambda: (X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow (X, A)$$

eine Zerlegung in eine direkte Summe:

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H(X_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow{\cong} H(X, A) \quad \text{Isomorphismus in GAb}$$

Die Zerlegung kommt von der Zerlegung von $S(X, A)$ in die entsprechende direkte Summe

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S(X_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow{\cong} S(X, A) \quad \text{in } K(\text{Ab}).$$

Insbesondere ist H_0X in natürlicher Weise isomorph zu der von den linearen Komponenten von X erzeugten freien abelschen Gruppen.

Beweis. Wir betrachten die Komplexabbildung

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S X_\lambda &\rightarrow S X \\ \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} &\mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \\ &\text{fast alle } c_\lambda = 0\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv: Die c_λ liegen für verschiedene λ in verschiedenen Räumen, d. h. $\sum c_\lambda = 0 \iff c_\lambda = 0 \forall \lambda \in \Lambda$.

Diese Abbildung ist auch surjektiv: Sei $c \in SX$, d. h.

$$c = \sum_{\substack{\sigma \text{ Simplex} \\ \text{von } X}} c_\sigma \sigma,$$

d. h. jedes σ ist eine stetige Abbildung $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$. Weil Δ_q wegzusammenhängend ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\lambda \in \Lambda$ mit $\sigma(\Delta_q) \subseteq X_\lambda$. Gezeigt: jeder der Summanden $c_\sigma \sigma$ liegt in einem SX_λ . Also ist die Abbildung surjektiv. Die Abbildung ist damit ein Isomorphismus von Komplexen.

Wir ersetzen die X_λ durch die A_λ und X durch A und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SX_\lambda & \xrightarrow{\cong} & SX \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SA_\lambda & \xrightarrow{\cong} & SA \end{array}$$

dessen Zeilen Isomorphismen sind. Also gilt

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{(SX_\lambda/SA_\lambda)}_{=S(X_\lambda, A_\lambda)} &= \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SX_\lambda / \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} SA_\lambda \\ &\cong \underbrace{SX/SA}_{=S(X, A)} \end{aligned}$$

Der Übergang zur Homologie liefert die Behauptung. □

Korollar 3.4.10 (Die 0-te Homologie des diskreten Raumes). Sei X ein diskreter topologischer Raum. Dann gilt

$$H_0X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$$

Beweis. Die linearen Zusammenhangskomponenten sind die einpunktigen Teilmengen von X . □

Definition 3.4.11 (Umgebungsretrakte). Seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum. $i: A \rightarrow X$ sei die natürliche Einbettung. A heißt Retrakt von X , wenn es eine stetige Abbildung

$$r: X \rightarrow A$$

gibt mit

$$r|_A = \text{id}_A, \quad r \circ i = \text{id}_A,$$

d. h. r ist eine Retraktion von i und insbesondere surjektiv.

A heißt Umgebungsretrakt von X , falls es eine Umgebung U von A gibt, $A \subseteq U \subseteq X$, sodaß A ein Retrakt von U ist.

Beispiel: $\{0, 1\}$ ist kein Retrakt von I , aber ein Umgebungsretrakt.

Korollar 3.5.2. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ homotop. Dann gilt

$$Hf = Hg: HX \rightarrow HY.$$

Korollar 3.5.3. Aus $(X, A) \cong (Y, B)$ folgt $H(X, A) \cong H(Y, B)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: (X, A) \rightarrow (Y, B) \\ g &: (Y, B) \rightarrow (X, A) \end{aligned}$$

mit $f \circ g = \text{id}$, $g \circ f = \text{id}$.

Nach 3.5.1 gilt dann aber

$$\begin{aligned} \text{id} &= H(f \circ g) = Hf \circ Hg \\ \text{id} &= H(g \circ f) = Hg \circ Hf \end{aligned}$$

Also sind $Hf: HX \rightarrow HY$ und $Hg: HY \rightarrow HX$ invers zueinander, also Isomorphismen. Analog sind $H(f|_A): HA \rightarrow HB$ und $H(g|_B): HB \rightarrow HA$ zueinander invers, also Isomorphismen. Betrachten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q A & \longrightarrow & H_q X & \longrightarrow & H_q(X, A) & \longrightarrow & H_{q-1} A & \longrightarrow & H_{q-1} X \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & f_* \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_q B & \longrightarrow & H_q Y & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \longrightarrow & H_{q-1} B & \longrightarrow & H_{q-1} Y \end{array}$$

Nach dem Fünferlemma ist f_* ein Isomorphismus. □

Korollar 3.5.4. Sei X ein kontrahierbarer Raum, also $X \cong P = \{p\}$ homotopieäquivalent. Dann gilt $\tilde{H}X = 0$. Genauer: $\eta: SX \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.

Vor dem Beweis von 3.5.1 zunächst eine

Bemerkung 3.5.5. (i) Wir suchen \bar{s} , sodaß

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} & \xrightarrow{s} & K(\text{Ab}) & \xrightarrow{H} & \text{GAb} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow H \\ \text{Top}' & \xrightarrow{\bar{s}} & K'(\text{Ab}) & & \end{array}$$

kommutiert

(ii) Seien $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotope Abbildungen. Dann sind auch $f, g: X \rightarrow Y$ und $f|_A, g|_A: A \rightarrow B$ homotop. Die Umkehrung gilt i.a. nicht!

Bsp.: $X = Y = I =: I$, $A = \{0, 1\}$, $B = I \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $f = \text{id}$. $f: X \rightarrow Y$ und $f|_A: A \rightarrow B$ sind Homotopieäquivalenzen. Als Abbildung von $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist f keine Homotopieäquivalenz: Angenommen, doch: es gebe eine Homotopieinverse $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$, so gilt $g(B) \subseteq A$. Also ist g auf jedem der beiden Teilintervalle $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ konstant.

$g \circ f: (X, A) \rightarrow (X, A)$ ist damit auf ganz X konstant, sagen wir

$$(g \circ f)(t) = t_0 \in \{0, 1\}.$$

3 Die singuläre Homologie

Eine Homotopie

$$H: g \circ f \simeq \text{id}: (X, A) \rightarrow (X, A) \quad H_s: X \rightarrow X, \quad 0 \leq s \leq 1$$

nimmt sowohl den Wert t_0 als auch den Wert $\{0, 1\} \setminus t_0$ an, also auch den Wert $\frac{1}{2}$.

Lemma 3.5.6 (Ein Kriterium für natürliche Homotopie). *Seien F^0, F^1 zwei natürliche Kettenabbildungen mit der Eigenschaft, daß die Komposition*

$$S \Delta_0 \xrightarrow{F^i} S(I \times \Delta_0) \xrightarrow{\eta} (\mathbb{Z}, 0)$$

unabhängig ist von $i \in \{0, 1\}$.

Dann existiert eine natürliche Komplex-Homotopie

$$s: F^0 \cong F^1.$$

„Natürlich“: Die Komplexabbildungen F^0, F^1 seien für jeden topologischen Raum X gegeben und für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow X'$ ist

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{F^i} & S(I \times X) \\ S(f) \downarrow & & \downarrow S(\text{id} \times f) \\ SX' & \xrightarrow{F^i} & S(I \times X') \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Wir haben eine Komplexhomotopie s zu konstruieren, d. h. Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} s_k: S_k X &\rightarrow S_{k+1}(I \times X) \\ \text{mit } \partial_{k+1} s_k + s_{k-1} \partial_k &= F_k^0 - F_k^1 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (*)$$

Wir konstruieren die s_k induktiv. Für $k < 0$ ist $S_k X = 0$, d. h. $s_k = 0$.

Sei s_k für alle $k < q$ so konstruiert, daß $(*)$ gilt. Wir haben s_q zu konstruieren: Sei $\iota_q: \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ die identische Abbildung. Wir betrachten ι_q als Simplex des Raumes Δ_q . Wir betrachten die Kette

$$c := F_{\iota_q}^0 - F_{\iota_q}^1 - s_{q-1} \partial \iota_q \in S(I \times \Delta_q).$$

1. Schritt: c ist ein Rand: es gibt ein $b \in S(I \times \Delta_q)$ mit $c = \partial b$.

Zunächst: c ist ein Zyklus:

$$\begin{aligned} \partial c &= \partial F^0 \iota - \partial F^1 \iota - \partial s_{q-1} \partial \iota \\ &= F^0 \partial \iota - F^1 \partial \iota - \partial s_{q-1} \partial \iota && (F^0, F^1 \text{ sind Kettenabbildungen}) \\ &= F^0 \partial \iota - F^1 \partial \iota - (F^0 - F^1 - s_{q-1} \partial) \partial \iota && (\text{mit } (*)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Gezeigt: c definiert eine Homologieklassen

$$[c] \in H_q(I \times \Delta_q).$$

Behauptung: $[c]$ liegt sogar in der reduzierten Homologie. Für $q = 0$ ist das trivial. Es gilt

$$0 = \gamma[c] = [\eta(c)]$$

wegen

$$\begin{aligned} \eta(c) &= \eta F^0 \iota_q - \eta F^1 \iota_q - \underbrace{\eta s_{q-1} \partial \iota_q}_{=0} && \text{wg. } q = 0 \\ &= (\eta F^0 - \eta F^1) \iota_q \\ &= 0 && \text{wg. } \eta F^0 = \eta F^1 \text{ nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

Gezeigt: $[c] \in \tilde{H}_q(I \times \Delta_q)$.

$I \times \Delta_q \subseteq \mathbb{R}^{q+2}$ ist konvexe Teilmenge. D. h. also $\tilde{H}_q(I \times \Delta_q) = 0$. $\Rightarrow c$ ist ein Rand, also

$$c = \partial b, \quad b = b_{q+1} \in S_{q+1}(I \times \Delta_q)$$

Definition von s_q mit Hilfe von b :

$$s_q: S_q X \rightarrow S_{q+1}(I \times X), \quad \sigma \mapsto S(\text{id} \times \sigma)(b) \quad (**)$$

2. Schritt: s_q ist wohldefiniert.

$\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ ist stetige Abbildung. $\Rightarrow \text{id} \times \sigma: I \times \Delta_q \rightarrow I \times X, (t, x) \mapsto (t, \sigma(x))$ ist stetig. Dies induziert eine Komplexabbildung

$$S(I \times \Delta_q) \xrightarrow{S(\text{id} \times \sigma)} S(I \times X)$$

also einen Gruppenhomomorphismus

$$S_{q+1}(I \times \Delta_q) \xrightarrow{S_{q+1}(\text{id} \times \sigma)} S_{q+1}(I \times X),$$

also ist **(**)** wohldefiniert.

3. Schritt: s_q ist natürlich.

Seien $h: X' \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und $\sigma': \Delta_q \rightarrow X'$ ein q -Simplex von X' . Dann ist zu zeigen:

$$\begin{array}{ccc} S_q X' & \longrightarrow & S_{q+1}(I \times X') \\ \downarrow h & \cup! & \downarrow S_q(\text{id} \times h) \\ S_q X & \longrightarrow & S_{q+1}(I \times X) \end{array}$$

ist kommutativ.

$$\begin{aligned} S(\text{id} \times h) s_q(\sigma') &= S(\text{id} \times h) S(\text{id} \times \sigma')(b) \\ &= S(\text{id} \times h \sigma')(b) \\ &= s_q(h \sigma') \\ &= s_q(S(h)(\sigma')) \end{aligned}$$

4. Schritt: Beweis von (*) für $k = q$.

$$\begin{aligned}
 (\partial s_q)\sigma &= \partial S(\text{id} \times \sigma)(b) \\
 &= S(\text{id} \times \sigma)\partial b \quad (\text{denn } S(\text{id} \times \sigma) \text{ ist Kettenabbildung}) \\
 &= S(\text{id} \times \sigma)c \quad (\text{Definition von } c) \\
 &= S(\text{id} \times \sigma)(F^0\iota_q - F^1\iota_q - s_{q-1}\partial\iota_q) \\
 &= F^0S(\sigma)\iota_q - F^1S(\sigma)\iota_q - s_{q-1}(S(\sigma)(\partial\iota_q)) \\
 &= F^0\sigma\iota_q - F^1\sigma\iota_q - s_{q-1}\partial s(\sigma)\iota_q \\
 &= F^0\sigma - F^1\sigma - s_{q-1}\partial\sigma \\
 \Rightarrow \quad \partial s_q &= F^0 - F^1 - s_{q-1}\partial \\
 \Rightarrow \quad \partial s_q + s_{q-1}\partial &= F^0 - F^1
 \end{aligned}$$

□

Beweis (der Homotopie-Invarianz, Satz 3.5.1). Seien

$$f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

stetige Abbildungen und

$$\Theta: f \simeq g$$

eine Homotopie. Für beliebige topologische Räume Z und $t \in I$ sei $F_Z^t = F^t$ folgende stetige Abbildung:

$$\begin{aligned}
 F^t: Z &\rightarrow I \times Z \\
 x &\mapsto (t, x)
 \end{aligned}$$

Für $Z = X$ gilt damit

$$\Theta \circ F^0 = f \quad \Theta \circ F^1 = g$$

Es genügt deshalb eine Homotopie

$$s: SF^0 \simeq SF^1: S(X, A) \rightarrow S(I \times X, I \times A)$$

zu konstruieren:

$$S\Theta \circ s: \underbrace{S\Theta \circ SF^0}_{=S(\Theta \circ F^0)=S(f)} \simeq \underbrace{S\Theta \circ SF^1}_{=S(\Theta \circ F^1)=S(g)}$$

Für $t \in I$ induziert F^t :

$$\begin{aligned}
 SF^t: SZ &\rightarrow S(I \times Z) \\
 c = \sum_{\sigma} c_{\sigma}\sigma &\mapsto SF^t c = \sum_{\sigma} c_{\sigma} \underbrace{\{t\} \times \sigma}_{\substack{\text{Abb.} \\ \Delta_q \mapsto I \times Z \\ x \mapsto (t, \sigma(x))}}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Summe der Koeffizienten von $SF^t c$ ist unabhängig von t . $\Rightarrow \eta \circ SF^t$ ist unabhängig von t . Wegen 3.5.6 folgt: SF^0 und SF^1 sind Kettenhomotopien.

Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum, $F^t: Z \rightarrow I \times Z, z \mapsto (t, z)$. Dann gilt $SF^t SA \subseteq S(I \times A) \forall t \in I$. Wegen der Natürlichkeit von S gilt auch

$$s(SA) \subseteq S(I \times A)$$

und wir haben das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{s} & S(I \times X) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ SA & \xrightarrow{\quad} & S(I \times A) \end{array}$$

Durch Übergang zu den Faktorkomplexen erhält man eine Komplexhomotopie

$$s: \bar{S}F^0 \simeq \bar{S}F^1: S(X, A) \rightarrow S(I \times X, I \times A)$$

□

Definition 3.5.7 (Deformationsretrakte und starke Deformationsretrakte). *Seien (X, A) ein topologisches Paar, $\iota: A \rightarrow X$ die natürliche Einbettung. Dann heißt A Deformationsretrakt von X , wenn es eine Homotopie*

$$\Theta_t: X \rightarrow X \quad t \in I$$

gibt mit

$$\Theta_0 = \text{id}_X \quad \text{und} \quad \Theta_1(X) = A, \quad \Theta_1|_A = \iota$$

In dieser Situation ist

$$r = \Theta_1: X \rightarrow A$$

eine Retraktion und es gilt

$$r \circ \iota = \text{id}_A \quad \iota \circ r \simeq \text{id}_X$$

d. h. ι und r sind homotopieinverse Homotopieäquivalenzen. Insbesondere sind

$$H\Theta_1: HX \rightarrow HA \quad H\iota: HA \rightarrow HX$$

Isomorphismen. Wenn für jedes $t \in I$ sogar ein Θ mit

$$\Theta_t|_A = \iota$$

existiert, so heißt A starker Deformationsretrakt.

Beispiel 3.5.8. (i) Sei $p \in X$ ein Punkt und $A = \{p\}$. Dann ist A genau dann ein Deformationsretrakt von X , wenn X kontrahierbar ist.

(ii) Die n -Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Man setze

$$\Theta_t(x) := \left(1 - t - \frac{t}{\|x\|}\right)x$$

(iii) Die Deformation von (i) zeigt auch: S^n ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathcal{B}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $\mathcal{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$. Insbesondere gilt

$$HS^n = H(\mathcal{B}^{n+1} \setminus \{0\}) \cong H(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

3.6 Baryzentrische Unterteilung

Definition 3.6.1 (Unterteilungshomomorphismus). Für nichtnegatives ganzes q heiße

$$B_q := \left(\frac{1}{q+1}, \dots, \frac{1}{q+1} \right) \in \Delta_q$$

Baryzentrum oder auch Massenmittelpunkt von Δ_q . Für jedes $(q-1)$ -Simplex

$$\sigma: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$$

bezeichne

$$B\sigma = B_q \circ \sigma$$

das Simplex von Δ_q , dessen Bild der Kegel mit der Spitze B_q und der Basis $\text{Im}(\sigma)$ ist. (vgl. Beweis von 3.4.5).

Durch die Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$B_q: S_{q-1}\Delta_q \rightarrow S_q\Delta_q.$$

Für jeden topologischen Raum X und für jedes ganzzahlige $q \geq 0$ sei

$$\beta_0 = \text{id } S_0X \rightarrow S_0X$$

seien $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}$ bereits definiert. Dann sei $\beta_q: S_qX \rightarrow S_qX$ der Gruppenhomomorphismus mit

$$\begin{aligned} \beta_q(\iota_q) &:= B_q\beta_{q-1}(\partial\iota_q) \\ \beta_q(\sigma) &:= S(\sigma)(\beta_q(\iota_q)) \end{aligned}$$

für $\iota_q = \text{id}: \Delta_q \rightarrow \Delta_q$, $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$.

Wir erhalten eine Komplexabbildung $\beta: SX \rightarrow SX$.

Satz 3.6.2 (Durchmesser mehrfacher baryzentrischer Unterteilungen). Für jedes $q \geq 0$ und jedes reelle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon, q)$ derart, daß für jedes $n \geq N(\varepsilon, q)$ und alle Simplizes τ der Kette

$$c = \beta_n(\iota_q) \in S_q\Delta_q$$

einen Durchmesser

$$\|\tau\| < \varepsilon$$

hat. Mit anderen Worten, alle Koeffizienten c_σ zu Simplizes mit einem Durchmesser $> \varepsilon$ sind 0.

$$\|\tau\| := \sup\{\|\tau(x) - \tau(y)\| \mid x, y \in \Delta_q\}.$$

Beweis. 1. Schritt: $\beta: SX \rightarrow SX$ ist natürlich in X

d. h. für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\beta} & SX \\ Sf \downarrow & \cup & \downarrow Sf \\ SY & \xrightarrow{\beta} & SY \end{array}$$

Für jedes q -Simplex $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ gilt:

$$\begin{aligned} S(f)\beta(\sigma) &= S(f)(S(\sigma)(\beta(\iota_q))) \\ &= S(f \circ \sigma)(\beta(\iota_q)) \\ &= \beta(f \circ \sigma) \\ &= \beta(S(f)(\sigma)) \\ \Rightarrow S(f) \circ \beta(\sigma) &= \beta \circ S(f) \end{aligned}$$

2. Schritt: β ist Kettenabbildung ($\partial\beta_q = \beta_{q-1}\partial$)

Für stetiges $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ und $q > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \partial(\beta_q\sigma) &= \partial(S(\sigma) \circ \beta_q(\iota_q)) && \text{(Definition von } \beta) \\ &= \partial(S(\sigma)(B_q\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && \text{(Definition von } \beta_q(\iota_q)) \\ &= S(\sigma)\partial(B_q\beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(} S(\sigma) \text{ ist Kettenabbildung)} \\ &= S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q) - B_{q-1}\partial(\beta_{q-1}(\partial\iota_q))) && \text{(siehe unten)} \\ &= S(\sigma)(\beta_{q-1}\partial\iota_q) - \underbrace{S(\sigma)(B_{q-1}\beta_{q-2}\partial\partial\iota_q)}_{=0} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \beta_{q-1}(S(\sigma)(\partial\iota_q)) && \text{(Natürlichkeit von } \beta) \\ &= \beta_{q-1}\partial\sigma && \text{(} S(\sigma) \text{ ist Kettenabbildung)} \end{aligned}$$

Zum 4. Gleichheitszeichen: Für jeden Punkt P in Δ_q ist die „Multiplikation mit P “ eine Kettenhomotopie:

$$\partial P + P\partial = \text{id} - \tilde{P} \circ \eta$$

(vgl. Beweis zu 3.4.5) Der Term $\tilde{P} \circ \eta$ ist wegen $q > 0$ in unserer Situation gleich Null.

3. Schritt

Sei $\sigma: \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein lineares Simplex mit den Ecken p_0, \dots, p_q .

Dann gilt

$$\|p - p'\| \leq \max\{\|p - p_i\| \mid i = 0, \dots, q\} \quad \text{für } p, p' \in \sigma(\Delta_p) \quad (*)$$

$$\|\sigma\| \leq \max\{\|p_i - p_j\| \mid i, j = 0, \dots, q\} \quad (**)$$

Zu (*):

$$\begin{aligned} p' &= \sum x'_i p_i, \quad \sum x'_i = 1 \\ \Rightarrow \|p - p'\| &= \left\| \left(\sum_{i=0}^q x'_i \right) p - p' \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^q x'_i p - x'_i p_i \right\| \\ &\leq \sum x'_i \|p - p_i\| \\ &\leq \left(\sum x'_i \right) \max\{\|p - p_i\| \mid i = 0, \dots, q\} \\ &= \max\{\|p - p_i\| \mid i = 0, \dots, q\}, \end{aligned}$$

und (**) folgt aus (*).

4. Schritt

Sei $\sigma: \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein lineares Simplex. Dann besteht $\beta(\sigma)$ aus Simplizes eines Durchmessers $\leq \frac{q}{q+1} \|\sigma\|$. Insbesondere besteht $\beta(\iota_q)$ aus Simplizes eines Durchmessers $\leq \frac{q}{q+1} \|\iota_q\|$.

Aus der Definition der Kegelkonstruktion von 3.4.5 ergibt sich

- (i) Verträglichkeit mit linearen Abbildungen. Für jedes singuläre Simplex $\tau: \Delta_r \rightarrow \mathbb{R}^s$, jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^s$ und jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^t$ gilt

$$S(f)(p\tau) = f(p) \cdot f \circ \tau$$

1.6.05

- (ii) Ist $\tau: \Delta_r \rightarrow \mathbb{R}^s$ ein lineares Simplex mit den Ecken $q_0, \dots, q_r \in \mathbb{R}^s$, $q_i = \tau(e_i)$ und $p \in \mathbb{R}^s$, so ist $p \cdot \tau: \Delta_{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^s$ ein lineares Simplex mit den Ecken p, q_0, \dots, q_r .

Sei $\sigma: \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^s$ ein lineares Simplex. Dann:

$$\begin{aligned} \beta(\sigma) &= \beta(S(\sigma)(\iota_q) = S(\sigma)\beta(\iota_q) && \text{(Natürlichkeit von } \beta) \\ &= S(\sigma)(B_q \cdot \beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(Definition von } \beta) \\ &= \sigma(B_q) \cdot S(\sigma)(\beta_{q-1}(\partial\iota_q)) && \text{(Eigenschaft (i))} \\ &= \sigma(B_q) \cdot \beta_{q-1}(S(\sigma)\partial\iota_q) && \text{(Natürlichkeit von } \beta) \\ &= \sigma(B_q) \cdot \beta_{q-1}(\partial\sigma) && \text{(} S(\sigma) \text{ ist Komplexabbildung und } S(\sigma)(\iota_q) = \sigma) \\ &= \sigma(B_q) \cdot \sum_{j=0}^q (-1)^j \beta_{q-1}(\sigma \varepsilon^j) && \text{(Definition von } \partial) \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma(B_q) \cdot \beta_{q-1}(\sigma \varepsilon^j) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta(\sigma)$ besteht aus Simplizes der Gestalt

$$\sigma' = \sigma(B_q) \cdot \tau$$

wobei τ ein Simplex der Kette

$$\beta_{q-1}(\sigma \varepsilon^j)$$

ist. Das Simplex $\sigma' = \sigma(B_q) \cdot \tau$ hat einen Durchmesser $\|p - p_i\|$, wobei p und p_i Ecken von σ' sind. Dann sind entweder p und p_i Ecken von τ oder oBdA $p = \sigma(B_q)$. Im ersten Fall:

$$\begin{aligned} \|\sigma'\| &= \|p - q_i\| \leq \|\tau\| \leq \frac{q-1}{q} \|\sigma \varepsilon^j\| \\ &\leq \frac{q-1}{q} \|\sigma\| \\ &\leq \frac{q}{q+1} \|\sigma\| \end{aligned}$$

Zum zweiten Fall:

$$\begin{aligned}
 \|\sigma'\| &= \|p - p_i\| = \|\sigma(B_q) - p_i\| && \text{für ein } i \\
 &= \left\| \left(\sum_{\mu=0}^q \frac{1}{q+1} p_\mu \right) - p_i \right\| \\
 &= \left\| \sum_{\mu=0}^q \frac{1}{q+1} (p_\mu - p_i) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{q+1} \sum_{\mu=0}^q \|p_\mu - p_i\| \\
 &\leq \frac{q}{q+1} \|\sigma\|
 \end{aligned}$$

□

Satz 3.6.3 (Kettenabbildungen, die in Dimension 0 übereinstimmen). *Seien*

$$\gamma^0, \gamma^1 : SX \rightarrow SX$$

zwei natürliche Komplexabbildungen, die in der Dimension 0 übereinstimmen:

$$\gamma^0|_{S_0X} = \gamma^1|_{S_0X}.$$

Dann existiert eine natürliche Homotopie

$$\gamma^0 \simeq \gamma^1.$$

Zur Erinnerung: natürlich heißt: γ^i für alle X gegeben und für $\forall f : X \rightarrow X'$ stetig ist

$$\begin{array}{ccc}
 SX & \xrightarrow{\gamma_X^i} & SXS(f) \\
 S(f) \downarrow & \cup & \downarrow \\
 SX' & \xrightarrow{\gamma_{X'}^i} & SX'
 \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Sei J die stetige Abbildung

$$\begin{aligned}
 J : X &\rightarrow I \times X \\
 x &\mapsto (0, x)
 \end{aligned}$$

Sei $F^i, i \in \{0, 1\}$ die Komposition

$$F^i : SX \xrightarrow{\gamma^i} SX \xrightarrow{S^J} S(I \times X).$$

F^0, F^1 stimmen ebenfalls in Dimension 0 überein, d. h. $\eta \circ F^0 = \eta \circ F^1$. Nach 3.5.6 existiert eine natürliche Homotopie

$$s : F^0 \simeq F^1. \tag{*}$$

3 Die singuläre Homologie

Sei $\pi: I \times X \rightarrow X, (t, x) \mapsto x$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Die Komposition von (*) mit $S(\pi)$ liefert Homotopie

$$S(\pi) \circ s: S(\pi) \circ F^0 \simeq S(\pi) \circ F^1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} S(\pi) \circ F^i &= S(\pi) \circ S J \circ \gamma^i \\ &= S(\pi \circ J) \circ \gamma^i \\ &= S(\text{id}) \circ \gamma^i = \gamma^i. \end{aligned}$$

□

3.7 Kleine Simplizes und Ausschneidungen

Bemerkung 3.7.1. Ziel ist der Vergleich $H(X, A)$ mit $H(X \setminus B, A \setminus B)$.

Definition 3.7.2 (Singulärer Komplex eines Systems von Teilmengen). Sei X ein topologischer Raum und \underline{U} ein System von Teilmengen von X .

$$S \underline{U}$$

sei der kleinste Teilkomplex von SX , welcher alle Teilkomplexe SU mit $U \in \underline{U}$ enthält.

$$S \underline{U} = \sum_{U \in \underline{U}} S U,$$

d. h. $S \underline{U}$ besteht aus allen \mathbb{Z} -Linearkombinationen von Simplizes

$$\sigma: \Delta_q \rightarrow X, \quad q = 0, 1, \dots \text{ mit } \sigma(\Delta_q) \subseteq U \text{ für ein } U \in \underline{U}.$$

$S \underline{U}$ heißt Komplex der \underline{U} -kleinen singulären Ketten von X .

Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum. Wir setzen $\underline{U} \cap A := \{U \cap A\}_{U \in \underline{U}}$. Dann gilt

$$S(\underline{U} \cap A) \subseteq S \underline{U}$$

als Teilkomplex. Bezeichnung:

$$S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) := S \underline{U} / S(\underline{U} \cap A)$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Komplexmorphismen mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S(\underline{U} \cap A) & \longrightarrow & S \underline{U} & \longrightarrow & S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & SX & \longrightarrow & S(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Satz 3.7.3 (Vergleich der Homologien $S(X, A)$ und $S(\underline{U}, \underline{U} \cap A)$). Seien (X, A) ein topologisches Paar, \underline{U} ein System von Teilmengen von X . Es gelte: Jeder Punkt $x \in X$ sei innerer Punkt von A oder innerer Punkt eines $U \in \underline{U}$.

Dann ist die natürliche Abbildung $S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) \rightarrow S(X, A)$ eine Homotopieäquivalenz, induziert also einen Isomorphismus $HS(\underline{U}, \underline{U} \cap A) \rightarrow H(X, A)$.

Korollar 3.7.4 (Ausschneidungssatz I). Seien (X, A) ein topologisches Paar und $Y \subseteq X$ ein Unterraum mit

$$X = \overset{\circ}{Y} \cup \overset{\circ}{A}$$

Dann induziert die natürliche Einbettung

$$j: (Y, Y \cap A) \rightarrow (X, A)$$

eine Homotopieäquivalenz

$$S(Y, Y \cap A) \rightarrow S(X, A)$$

und damit Isomorphismen

$$H(Y, Y \cap A) \rightarrow H(X, A)$$

Korollar 3.7.5 (Ausschneidungssatz II). Seien (X, A) ein topologisches Paar und $B \subseteq A$ eine Teilmenge mit

$$\bar{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$$

Dann induziert die natürliche Einbettung

$$(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow (X, A)$$

eine Homotopieäquivalenz

$$S(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow S(X, A)$$

also einen Isomorphismus

$$H(X \setminus B, A \setminus B) \rightarrow H(X, A)$$

Beweis (von 3.7.4 und 3.7.5). 3.7.4 ist Spezialfall mit

$$\underline{U} = \{Y\}.$$

3.7.5 erhält man aus 3.7.4, indem man Y durch das Komplement $B = X \setminus Y$ ersetzt. □

Beweis (von 3.7.3). **1. Schritt**

Für jede Kette $c \in S_q X$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\beta^n(c) \in S_q \underline{V} \text{ mit } \underline{V} = \underline{U} \cup \{A\}.$$

Da c eine endliche Linearkombination von Simplizes ist, können wir annehmen:

$$c = \sigma: \Delta_q \rightarrow X$$

ist ein Simplex von X . Nach Voraussetzung bilden die

$$\overset{\circ}{V} \text{ mit } V \in \underline{V}$$

eine offene Überdeckung von X . Also bilden die

$$W := \sigma^{-1}(\overset{\circ}{V}) \text{ mit } V \in \underline{V}$$

eine offene Überdeckung \underline{W} von Δ_q .

3 Die singuläre Homologie

Sei $\varepsilon > 0$ eine Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung, d. h. jede Teilmenge von Δ_q mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ liegt ganz in einer Menge $W \in \underline{W}$. Dieses ε existiert, da Δ_q kompakt ist. Nach 3.6.2 gibt es eine baryzentrische Unterteilung

$$\beta^n(\iota_q)$$

derart, daß jedes Simplex von $\beta^n(\iota_q)$ einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat, also in einem $W \in \underline{W}$ liegt. Damit liegt jedes Simplex von

$$s(\sigma)(\beta^n(\iota_q)) = \beta^n(s(\sigma)\iota_q) = \beta^n(\sigma)$$

ganz in einem \mathring{V} mit $V \in \underline{V}$, d. h. $\beta^n(\sigma) \in S(\underline{V})$

2. Schritt: $j: S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) \rightarrow S(X, A)$ ist Homotopieäquivalenz

Weil die Komplexe $S(\underline{U}, \underline{U} \cap A)$ und $S(X, A)$ frei sind, reicht es zu zeigen, j induziert einen Isomorphismus auf der Homologie. Wir betrachten die Homologiesequenz zur kurzen exakten Komplexsequenz

$$0 \rightarrow S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) \rightarrow S(X, A) \rightarrow S(X, A)/S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) \rightarrow 0.$$

Es reicht z. z.: $H(S(X, A)/S(\underline{U}, \underline{U} \cap A)) = 0$. Dazu reicht z. z.: jeder Zyklus von

$$K = S(X, A)/S(\underline{U}, \underline{U} \cap A) = SX/(SA + S(\underline{U})) = SX/S(\underline{V})$$

ist ein Rand. Ein Zyklus von K wird repräsentiert durch eine Kette

$$z \in SX \text{ mit } \partial z \in S(\underline{V}) \quad (\underline{V} = \underline{U} \cup \{A\}).$$

Nach Konstruktion ist die baryzentrische Unterteilung eine Kettenabbildung

$$\beta: SX \rightarrow SX,$$

die in der Dimension 0 mit der identischen Abbildung zusammenfällt. Dasselbe gilt für

$$\beta^n: SX \rightarrow SX \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, \dots$$

Nach 3.6.3 gibt es eine natürliche Homotopie

$$s: \beta^n \simeq \text{id}.$$

Genauer gilt

$$\text{id} = \partial s + s\partial + \beta^n$$

und speziell für z wie oben:

$$z = \partial s z + s\partial z + \beta^n z. \quad (*)$$

Wir können annehmen, n ist so groß gewählt, daß alle Simplizes von $\beta^n z$ klein sind bezüglich \underline{V} , d. h. $\beta^n z \in S(\underline{V})$. Wir wollen zeigen: z repräsentiert einen Rand von K , d. h.

$$z = \text{Rand} + \text{Kette von } S(\underline{V})$$

Wir betrachten (*): Nach Voraussetzung gilt: $\partial z \in S(\underline{V})$. Weil s natürlich ist, folgt: $s\partial z \in S(\underline{V})$.

Gezeigt: (*) ist eine Darstellung von z in der gewünschten Gestalt. \square

Definition 3.7.6 (Bukett punktierter topologischer Räume). *Ein punktierter topologischer Raum ist ein Paar*

$$(X, x)$$

bestehend aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x \in X$. Der Punkt x heißt dann auch Grund- oder Basispunkt. Eine stetige Abbildung

$$f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$$

punktierter topologischer Räume ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$.

Die punktierten topologische Räume bilden Kategorie Top_ . Diese kann man als Teilkategorie von $\text{Top}^{(2)}$ auffassen:*

$$\begin{aligned} \text{Top}_* &\rightarrow \text{Top}^{(2)} \\ (X, x) &\mapsto (X, \{x\}) \end{aligned}$$

Seien (X, p) und (Y, q) Objekte von Top_ . Dann heißt das folgende Objekt von Top_* Bukett von (X, p) und (Y, q) :*

$$X \vee Y := X \dot{\cup} Y / \sim$$

Dabei sei \sim die Äquivalenzrelation, die die Basispunkte identifiziert, d. h. die Äquivalenzrelation mit den folgenden Äquivalenzklassen:

$$\{p, q\}, \quad \{x\} \text{ für } x \in X \setminus \{p\}, \quad \{y\} \text{ für } y \in Y \setminus \{q\}$$

Die Ausgangsräume lassen sich mit Teilmengen des Buketts identifizieren vermittels der Abbildungen

$$\begin{array}{ll} X \rightarrow X \vee Y & Y \rightarrow X \vee Y \\ x \mapsto [x] & y \mapsto [y] \end{array}$$

Dann gilt

$$X \vee Y = X \cup Y \quad X \cap Y = * = [p] = [q]$$

Die Topologie des Buketts ist so definiert: Eine Teilmenge $U \subseteq X \vee Y$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X$ offen in X und $U \cap Y$ offen in Y .

Satz 3.7.7 (Homologie eines Buketts). *Seien (X, p) und (Y, q) Objekte von Top_* . Die Abschließung $\overline{\{p\}}$ von $\{p\}$ besitze eine Umgebung $U \subseteq X$ derart, daß eine stetige Familie*

$$d_t: (U, p) \rightarrow (X, p), \quad t \in I$$

existiert mit $d_0 = \text{id}$, $d_1(U) = \{p\}$. $\{p\}$ ist Deformationsretrakt einer Umgebung von $\overline{\{p\}}$. Dann induzieren die Einbettungen

$$i: X \rightarrow X \vee Y, \quad j: Y \rightarrow X \vee Y$$

einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H(X, p) \oplus H(Y, q) &\rightarrow H(X \vee Y, *) \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [i_*(\alpha) + j_*(\beta)] = i_*[\alpha] + j_*[\beta] \\ \text{bzw. } \tilde{H}X \oplus \tilde{H}Y &\rightarrow \tilde{H}(X \vee Y) \end{aligned}$$

3 Die singuläre Homologie

Beweis. Nach 3.4.2 reicht es, eine der beiden Isomorphieaussagen zu beweisen. Wir betrachten die reduzierte Homologiesequenz des Paares $(X \vee Y, Y)$. Y ist ein Retrakt von $X \vee Y$. (Man wende auf die Projektion $X \rightarrow \{p\}$ den Funktor $\vee Y$ an). Deshalb degeneriert die Homologiesequenz dieses Paares (3.4.13):

$$0 \rightarrow \tilde{H}Y \rightarrow \tilde{H}(X \vee Y) \xrightarrow{*} H(X \vee Y, Y) \rightarrow 0$$

Die natürliche Einbettung von $Y \rightarrow X \vee Y$ besitzt eine Linksinverse. Deshalb zerfällt diese Sequenz:

$$\tilde{H}Y \oplus H(X \vee Y, Y) \cong \tilde{H}(X \vee Y)$$

Diese Isomorphie wird realisiert durch die natürliche Einbettung von $Y \rightarrow X \vee Y$ und irgendeinem Schnitt von $\tilde{H}(X \vee Y) \xrightarrow{*} H(X \vee Y, Y)$. Es reicht z. z.: die natürliche Einbettung $(X, p) \rightarrow (X \vee Y, Y)$ induziert Isomorphismus:

$$H(X, p) \rightarrow H(X \vee Y, Y).$$

Zum Beweis benutzen wir die im Satz angegebene Homotopie d_t .

$$d: I \times U \rightarrow X$$

induziert stetige Abbildung

$$d: (I \times U) \vee Y \rightarrow X \vee Y = d \times \text{id}$$

Der Basispunkt von $I \times U$ sei $(0, p)$. Damit haben wir kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (I \times U) \vee Y & \xrightarrow{d} & X \vee Y \\ \downarrow & \cup & \downarrow \text{id} \\ I \times (U \vee Y) & \xrightarrow{\varphi} & X \vee Y \end{array}$$

(wobei die vertikalen Pfeile die natürlichen Projektionen bezeichnen). Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi|_{I \times U}(t, u) &= d(t, u) & \varphi|_{I \times U}(0, p) &= d(0, p) = [p] \\ \varphi|_{I \times Y}(t, y) &= y & &= \varphi|_{I \times Y}(0, q) = [q] \end{aligned}$$

φ definiert stetige Familie

$$\varphi_t: (U \vee Y, Y) \rightarrow (X \vee Y, Y)$$

Für $t = 0$ erhalten wir die identische Abbildung (wegen $d_0 = \text{id}$). Für $t = 1$ erhalten wir eine Abbildung mit Werten in Y wegen $d_1(U) = \{p\}$. Die induzierte Familie

$$H\varphi_t: H(U \vee Y, Y) \rightarrow H(X \vee Y, Y)$$

ist für $t = 1$: $H\varphi_t = 0$.

Die natürliche Einbettung

$$U \vee Y \rightarrow X \vee Y$$

induziert Nullabbildung auf der Homologie. Daher haben wir kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen (Homologiesequenz eines Tripels):

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{0} & H(X \vee Y, Y) & \longrightarrow & H(X \vee Y, U \vee Y) & \longrightarrow & H(U \vee Y, Y) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H(U, p) & \xrightarrow{d_t} & H(X, p) & \longrightarrow & H(X, U) & \longrightarrow & H(U, p) \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Die obere Zeile ist Teil der Homologiesequenz zum Tripel $(X \vee Y, U \vee Y, Y)$, die untere Zeile die zum Tripel $(X, U, \{p\})$. Die linke Abbildung der oberen Zeile ist 0 wegen obiger Argumentation. Die der unteren Zeile aus denselben Gründen mit $Y = \{q\}$. Die vertikalen Abbildungen kommen von der natürlichen Einbettung

$$(X, U, \{p\}) \xrightarrow{\subseteq} (X \vee Y, U \vee Y, Y)$$

Die Projektion $Y \rightarrow \{q\}$ induziert Abbildung in umgekehrter Richtung, d. h., alle vertikalen Abbildungen besitzen Linksinverse, sind also injektiv. Der Ausschneidungssatz für die mittlere Abbildung liefert:

$$Y \setminus \{*\} \subseteq U \vee Y$$

kann entfernt werden.

(Dazu: reicht zu zeigen: $V := U \vee Y$ offen in $X \vee Y$, außerdem $\overline{Y \setminus \{*\}} \subseteq U \vee Y$. Zum ersten: $V \cap X = U$ offen in X , $V \cap Y = Y$ offen in Y . Zum zweiten:

$$\overline{Y} = (\overline{Y \cap Y}) \cup (\overline{Y \cap X}) = Y \cup \overline{Y \cap X} = Y \cup \overline{\{*\}} \subseteq U \vee Y.)$$

Die Abbildungen in der Mitte und rechts sind so Isomorphismen. Die Abbildung links ist nach Fünferlemma auch Isomorphismus. □

3.8 Die MAYER-VIETORIS-Sequenz

Bemerkung 3.8.1 (Bezeichnungen). Sei X topologischer Raum, X_1, X_2 Unterräume (also ist (X, X_1, X_2) Triade). $i_\mu: X_\mu \rightarrow X$ mit $\mu = 1, 2$ bezeichne die natürliche Einbettung.

Ziel ist der Vergleich von $H(X_1 \cup X_2), HX_1, HX_2, H(X_1 \cap X_2)$.

Definition und Satz 3.8.2 (Ausschneidungstriaden). *Eine Triade (X, X_1, X_2) heißt ausschneidend oder auch Ausschneidungstriade, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

- (i) $Hi_1: H(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow H(X_1 \cup X_2, X_2)$ ist bijektiv.
- (ii) $Hi_2: H(X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow H(X_1 \cup X_2, X_1)$ ist bijektiv.
- (iii) $(Hi_1, Hi_2): H(X_1, X_1 \cap X_2) \oplus H(X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow H(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$ ist bijektiv.
- (iv) $Hi: HS\{X_1, X_2\} \rightarrow HS(X_1 \cup X_2) = H(X_1 \cup X_2)$ ist bijektiv.
- (v) $H(\bar{i}): H\left(\frac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)}\right) \rightarrow H\left(\frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)}\right)$ ist bijektiv.
- (vi) $Hp: H\left(\frac{SX}{S\{X_1, X_2\}}\right) \rightarrow H\left(\frac{SX}{S(X_1 \cup X_2)}\right) = H(X, X_1 \cup X_2)$ ist bijektiv.

mit

$$\begin{aligned} S\{X_1, X_2\} &= SX_1 + SX_2 \\ i: S\{X_1, X_2\} &\rightarrow S(X_1 \cup X_2) \quad \text{natürliche Einbettung} \\ p: SX/S\{X_1, X_2\} &\rightarrow SX/S(X_1 \cup X_2) \quad \text{natürliche Projektion} \\ \bar{i} &\text{ sei induziert durch } i \end{aligned}$$

3 Die singuläre Homologie

Beweis. Wir betrachten die kurzen exakten Sequenzen von Komplexen:

$$0 \rightarrow \frac{SX_1}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow{i_1} \frac{S(X_1 \cup X_2)}{SX_2} \rightarrow \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \rightarrow 0$$

Wir haben Exaktheit nach Homomorphiesatz ($0 \rightarrow A/C \xrightarrow{\alpha} M/B \rightarrow M/(A+B) \rightarrow 0$ und weiter $\frac{M}{B} / \text{Im } \alpha = (\frac{M}{B}) / \frac{A+B}{B} = M/(A+B)$). Weiter haben wir:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow S\{X_1, X_2\} \xrightarrow{i} S(X_1 \cup X_2) \rightarrow \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \frac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow{\bar{i}} \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} \rightarrow \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}} \rightarrow \frac{SX}{S\{X_1, X_2\}} \xrightarrow{p} \frac{SX}{S(X_1, X_2)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der zugehörigen langen Homologiesequenzen sind die Bedingungen (i),(iv),(v) und (vi) äquivalent zu

$$H\left(\frac{S(X_1 \cup X_2)}{S\{X_1, X_2\}}\right) = 0.$$

Insbesondere gilt (i) \iff (iv) \iff (v) \iff (vi). Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch (ii) \iff (iv) \iff (v) \iff (vi). Es reicht nun zu zeigen: (iii) \iff (v). Das ist aber der Fall aufgrund des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \frac{SX_1}{S(X_1 \cap X_2)} \oplus \frac{SX_2}{S(X_1 \cap X_2)} & \cong & \frac{S\{X_1, X_2\}}{S(X_1 \cap X_2)} \\ \downarrow (i_1, i_2) & & \downarrow i \\ \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} & = & \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(X_1 \cap X_2)} \end{array}$$

(i_1, i_2) und i sind gleich bis auf Isomorphie. □

Beispiele:

- (i) Falls X_1 und X_2 offen sind in $X_1 \cup X_2$, so ist

$$(X_1 \cup X_2, X_1, X_2)$$

eine Ausschneidungstriade (nach Ausschneidungssatz Variante I und (iv)).

- (ii) Andere Beispiele sind sogenannte CW-Räume und ihre CW-Unterräume. Polyeder sind Spezialfälle solcher CW-Räume.

- (iii) (X, X_1, X_2) mit $X = \mathbb{R}$, $X_1 = (-\infty, 0]$, $X_2 = (0, \infty)$ ist keine Ausschneidungstriade. Man überprüfe (i):

$$\begin{array}{ccc} H(X_1, X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H(X_1 \cup X_2, X_2) \\ \parallel & & \parallel \\ H((-\infty, 0], \emptyset) & & H(\mathbb{R}, (0, \infty)) \\ \parallel & & \parallel \\ H((-\infty, 0]) & & H(\mathbb{R}, \{1\}) \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{Z}, 0) & & \tilde{H}(\mathbb{R}) = 0 \end{array}$$

Das zweite Gleichheitszeichen rechts ergibt sich, da es eine Deformationsretraktion gibt, das dritte, da \mathbb{R} kontrahierbar ist.

Korollar 3.8.3 (Absolute MAYER-VIETORIS-Sequenz). Für jede Triade (X, X_1, X_2) ist

$$0 \longrightarrow S(X_1 \cap X_2) \longrightarrow SX_1 \oplus SX_2 \longrightarrow S\{X_1, X_2\} \longrightarrow 0$$

$$c \longmapsto (c, -c), (a, b) \longmapsto a + b$$

exakt. Falls (X, X_1, X_2) ausschneidend ist, hat die zugehörige lange Homologiesequenz die Gestalt

$$\dots \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q X_1 \oplus H_q X_2 \rightarrow H_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

Beweis. Folgt aus Bedingung (iv) von 3.8.2. □

Satz 3.8.4 (Relative Version der MAYER-VIETORIS-Sequenz). Für jede Triade (X, X_1, X_2) hat man eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow \frac{SX}{S(X_1 \cap X_2)} \rightarrow \frac{SX}{SX_1} \oplus \frac{SX}{SX_2} \rightarrow \frac{SX}{S\{X_1, X_2\}} \rightarrow 0. \quad (*)$$

Falls (X, X_1, X_2) ausschneidend ist, hat die zugehörige Homologiesequenz die Gestalt

$$\dots \rightarrow H_q(X, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X, X_1) \oplus H_q(X, X_2) \rightarrow H_q(X, X_1 \cup X_2) \rightarrow H_{q-1}(X, X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots \quad (**)$$

Beweis. (**) folgt aus (*) und 3.8.2 (vi). Zur Exaktheit von (*):

$$[c] \mapsto ([c], [-c]), ([a], [b]) \mapsto [a + b]$$

liefert sofort Komplexheit. Die Surjektivität der rechten Abbildung ist trivial. Ebenso die Injektivität der linken. Exaktheit in der Mitte: Sei $([a], [b])$ ein Element aus der Mitte, welches in die 0 abgebildet wird.

$$[a + b] = 0 \in \frac{SX}{S\{X_1, X_2\}} \quad (***)$$

OBdA können wir annehmen, in der Kette a kommen keine Simplizes von X_1 vor, in b keine von X_2 . Wegen (***) gilt

$$a + b = c_1 + c_2 \text{ mit } c_1 \in SX_1, c_2 \in SX_2$$

$\Rightarrow a = c_2, b = c_1$. Wir setzen $c = c_2 - c_1 = a - b$. Dann ist $[c]$ ein Element von $\frac{SX}{S(X_1 \cap X_2)}$, dessen Bild in $\frac{SX}{SX_1} \oplus \frac{SX}{SX_2}$

$$([c], [-c]) = ([a - b], [b - a]) = ([a], [b])$$

ist. □

3 Die singuläre Homologie

Satz 3.8.5 (Zusammenhangshomomorphismus der absoluten MAYER-VIETORIS-Sequenz). *Der Zusammenhangshomomorphismus der MAYER-VIETORIS-Sequenz von 3.8.3 ist die Komposition der folgenden Abbildungen:*

$$H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\alpha} H_q(X_1 \cup X_2, X_2) \xrightarrow[\cong]{\beta} H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\gamma} H_{q-1}(X_1 \cap X_2).$$

Dabei sei α induziert durch die Einbettung

$$(X_1 \cup X_2, \emptyset) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2).$$

β komme von der Ausschneidungsbedingung (i), d. h. von der Einbettung

$$(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2).$$

Die Abbildung γ sei der Zusammenhangshomomorphismus der langen Homologiesequenz des zugehörigen Paares $(X_1, X_1 \cap X_2)$.

Beweis. Vergleich der beiden Definitionen für die beiden Zusammenhangshomomorphismen. Sei $u \in H(X_1 \cup X_2) = HS\{X_1, X_2\}$. Wahl eines Repräsentanten von u :

$$c_1 + c_2 \in S\{X_1, X_2\}, \quad c_1 \in SX_1, c_2 \in SX_2, \quad \partial c_1 + \partial c_2 = 0.$$

Wahl eines Urbilds von $c_1 + c_2$ in $SX_1 \oplus SX_2$: (c_1, c_2) . Randoperator anwenden:

$$(\partial c_1, \partial c_2) = (\partial c_1, -\partial c_2)$$

Urbild in $S(X_1 \cap X_2)$: ∂c_1 . Bild von u beim Zusammenhangshomomorphismus der MAYER-VIETORIS-Sequenz ist gerade

$$[\partial c_1] \in H(X_1 \cap X_2).$$

Dies ist gerade das Bild von u bei der Zusammensetzung von α, β und γ . □

Satz 3.8.6 (Zusammenhangshomomorphismus der relativen MAYER-VIETORIS-Sequenz). *Der Zusammenhangshomomorphismus der relativen MAYER-VIETORIS-Sequenz von 3.8.4 ist gerade die Komposition*

$$H_q(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\alpha} h_{q-1}(X_1 \cup X_2, X_1) \xrightarrow[\cong]{\beta} H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\gamma} H_{q-1}(X, X_1 \cap X_2)$$

Dabei seien α der Zusammenhangshomomorphismus zu $(X, X_1 \cup X_2, X_1)$, β der Ausschneidungsisomorphismus, d. h., β kommt von der Einbettung $(X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_1 \cap X_2)$ und γ komme von der Einbettung $X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_1 \cap X_2)$

Beweis. Man verwende

$$H(X, X_1 \cup X_2) = H(SX/S\{X_1, X_2\})$$

und ähnliche Argumente wie beim Beweis von oben. □

Satz 3.8.7 (Funktorialität). Sei $f: (X, X_1, X_2) \rightarrow (Y, Y_1, Y_2)$ eine stetige Abbildung von Ausschneidungstriaden. Dann induziert f einen Morphismus zwischen den absoluten bzw. relativen MAYER-VIETORIS-Sequenzen

$$\begin{array}{ccc} \text{MV}(X, X_1, X_2) & & \text{(kommutatives Diagramm)} \\ \downarrow & & \\ \text{MV}(Y, Y_1, Y_2) & & \end{array}$$

Beweis (und genauere Formulierung). Übung. □

Satz 3.8.8 (Reduzierte MAYER-VIETORIS-Sequenz). Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Dann besteht eine exakte Sequenz

$$\widetilde{\text{MV}} \dots \rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

Beweis. Sei $p \in X_1 \cap X_2$, $P = \{p\}$. Dann ist (P, P, P) eine Ausschneidungstriade (weil P offen in sich). Also ist $H(P, P \cap P) \rightarrow H(P \cup P, P)$ ein Isomorphismus. Die natürliche Einbettung

$$\alpha: (P, P, P) \rightarrow (X, X_1, X_2)$$

induziert einen Morphismus der zugehörigen MAYER-VIETORIS-Sequenzen

$$\text{MV}(\alpha): \text{MV}(P, P, P) \rightarrow \text{MV}(X, X_1, X_2).$$

(α ist Komplexmorphismus.) Die Gruppen der gesuchten exakten Sequenz treten als direkte Summanden der Sequenz

$$\text{MV}(X, X_1, X_2)$$

auf, wobei die anderen direkten Summanden gerade die Gruppen von $\text{MV}(P, P, P)$ sind. Zum Beweis der Behauptung reicht es, z. z.:

$$\text{MV}(X, X_1, X_2) = M(P, P, P) \oplus \widetilde{\text{MV}}$$

Es reicht also z. z.: $\text{MV}(\alpha)$ ist Teil einer zerfallenden exakten Sequenz von Komplexen. Wir betrachten die stetige Abbildung von Triaden

$$\beta: (X, X_1, X_2) \rightarrow (P, P, P) \quad x \mapsto p.$$

Es gilt: $\beta \circ \alpha = \text{id}$, α besitzt also Linksinverses, also besitzt $\text{MV}(\alpha)$ ein Linksinverses $\text{MV}(\beta)$, d. h. $\text{MV}(\beta) \circ \text{MV}(\alpha) = \text{id}$, die Komplexsequenz

$$0 \rightarrow \text{MV}(P, P, P) \xrightarrow{\text{MV}(\alpha)} \text{MV}(X, X_1, X_2) \rightarrow \frac{\text{MV}(X, X_1, X_2)}{\text{MV}(P, P, P)} \rightarrow 0$$

zerfällt. Aus der Exaktheit von $\text{MV}(X, X_1, X_2)$ und $\text{MV}(P, P, P)$ folgt also die von $\widetilde{\text{MV}}$. □

3 Die singuläre Homologie

Bemerkung 3.8.9 (Homologie eines Buketts). Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit

$$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset, \quad \tilde{H}(X_1 \cup X_2) = 0.$$

Wegen der reduzierten MAYER-VIETORIS-Sequenz ist dann

$$\tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2 \rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2)$$

ein Isomorphismus. Im Fall, daß $X = X_1 \vee X_2$ das Bukett von X_1, X_2 ist, erhalten wir gerade [3.7.7](#). Der Beweis von [3.7.7](#) bestand im wesentlichen gerade darin, zu zeigen, daß unter den dortigen Bedingungen (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade ist.

Beispiel 3.8.10 (Satz von JORDAN). Sei (X, X_1, X_2) Ausschneidungstriade mit

$$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset, \quad \tilde{H}(X_1 \cap X_2) = 0.$$

Also liefert die reduzierte MAYER-VIETORIS-Sequenz einen Isomorphismus

$$\tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow \tilde{H}_q X_1 \oplus \tilde{H}_q X_2.$$

Spezialfall: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *dicke Sphäre*, eine offene Teilmenge, die homöomorph ist zu $\mathcal{S}^{n-1} \times (-1, 1)$. Sei $\Phi: \mathcal{S}^{n-1} \times (-1, 1) \rightarrow U$ ein Homöomorphismus. Die Menge

$$\Sigma := \Phi(\mathcal{S}^{n-1} \times \{0\})$$

heiße *Skelett* der dicken Sphäre U .

$$V := \mathbb{R}^n \setminus \Sigma.$$

Dann ist (\mathbb{R}^n, U, V) Ausschneidungstriade ($\mathbb{R}^n = U \cup V$ mit U, V offen). Es gilt

$$U \cap V = U \setminus \Sigma = \Phi(\mathcal{S}^{n-1} \times (-1, 0) \cup \mathcal{S}^{n-1} \times (0, 1)) \neq \emptyset$$

$$\tilde{H}(U \cup V) = \tilde{H}(\mathbb{R}^n) = 0.$$

Damit gilt:

$$\tilde{H}(U \cap V) \cong \tilde{H}U \oplus \tilde{H}V$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_0(U \cap V) \cong \tilde{H}_0 U \oplus \tilde{H}_0 V$$

$$\tilde{H}_0(U) = \tilde{H}(\mathcal{S}^{n-1} \times (-1, 1)) = 0,$$

weil $\mathcal{S}^{n-1} \times (-1, 1)$ linear zusammenhängend ist für $n > 1$. Weil $U \cap V$ in zwei linear zusammenhängende Teilmengen zerfällt, gilt $\tilde{H}_0(U \cap V) = \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \tilde{H}_0(V) = \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad H_0(V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Also teilt das Skelett $\Sigma^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ einer beliebigen dicken Sphäre im Fall $n > 1$ den \mathbb{R}^n in zwei lineare Komponenten.

Beispiel 3.8.11 (Homologie einer Suspension). Sei (X, X_1, X_2) eine Ausschneidungstriade mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset, \tilde{H}X_1 = \tilde{H}X_2 = 0$. Die reduzierte MAYER-VIETORIS-Sequenz liefert einen Isomorphismus

$$\tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \cong \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

Spezialfall: Suspension ΣX eines Raumes X .

$$\Sigma X = [0, 1] \times X / \sim$$

entstehe aus dem Zylinder $I \times X$ durch Kontraktion des Daches und des Bodens in einen Punkt. \sim sei Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen

$$\{0\} \times X, \{1\} \times X, \{(t, x)\}_{t \in I, x \in X}$$

wirklich? Die natürliche Abbildung $X \rightarrow \Sigma X$ ist surjektiv. ΣX sei mit Faktortopologie versehen. Wir haben stetige Abbildung

$$h: \Sigma X \rightarrow I, [t, x] \mapsto t$$

$C_0 X := h^{-1}(0, 1]$ und $C_1 X := h^{-1}[0, 1)$ sind offene Teilmengen der Suspension ΣX , welche homöomorph zu einem Kegel über X sind, d. h. $C_0 X, C_1 X$ sind kontrahierbar.

$$s_t: C_1 X \rightarrow C_1 X \quad [s, x] \mapsto [ts, x]$$

ist Kontraktion (analog für $C_0 X$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{H} C_0 X &= \tilde{H} C_1 X = 0 \\ C_0 X \cap C_1 X &= X \times (0, 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\Sigma X, C_0 X, C_1 X)$ ist ausschneidend.

$$\tilde{H}_q(\Sigma X) = \tilde{H}_q(C_0 X \cup C_1 X) \stackrel{MV}{=} \tilde{H}_{q-1}(C_0 X \cap C_1 X) = \tilde{H}_{q-1}((0, 1) \times X) = \tilde{H}_{q-1}(X)$$

Spezialfall: $\Sigma \mathcal{S}^n = \mathcal{S}^{n+1}$.

$$\Rightarrow H_q(\mathcal{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n, 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 3.8.12 (MAYER-VIETORIS-Sequenz eines Paares von Ausschneidungstriaden). Seien (A, A_1, A_2) und (X, X_1, X_2) zwei Triaden mit

$$(A, A_1, A_2) \subseteq (X, X_1, X_2).$$

Dann hat man ein kommutatives Diagramm von Komplexmorphismen mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S\{A_1, A_2\} & \longrightarrow & S\{X_1, X_2\} & \longrightarrow & \frac{S\{X_1, X_2\}}{S\{A_1, A_2\}} \longrightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S(A_1 \cup A_2) & \longrightarrow & S(X_1 \cup X_2) & \longrightarrow & \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(A_1 \cup A_2)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

(gilt nach Homomorphiesatz.) Wenn die beiden Triaden ausschneidend sind, so induzieren die beiden Abbildungen α und β Isomorphismen auf den Homologien. Nach Fünferlemma und den zugehörigen langen Homologiesequenzen ist das dann auch für γ der Fall. Da die beteiligten Komplexe frei sind, ist insbesondere

$$\frac{S\{X_1, X_2\}}{S\{A_1, A_2\}} \simeq \frac{S(X_1 \cup X_2)}{S(A_1 \cup A_2)} \quad (\text{„}\simeq\text{“ als „homotopieäquivalent“}). \quad (*)$$

3 Die singuläre Homologie

Die folgende Komplexsequenz ist exakt:

$$0 \rightarrow \frac{S(X_1 \cap X_2)}{S(A_1 \cap A_2)} \rightarrow \frac{S X_1}{S A_1} \oplus \frac{S X_2}{S A_2} \rightarrow \frac{S\{X_1, X_2\}}{S\{A_1, A_2\}} \rightarrow 0$$

Wegen (*) hat die zugehörige lange Homologiesequenz die Gestalt

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \rightarrow H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2) \rightarrow \\ \rightarrow H_q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Diese Sequenz heißt **MAYER-VIETORIS-Sequenz** des Triadenpaares $(X, X_1, X_2) \supseteq (A, A_1, A_2)$.

Bemerkung 3.8.13 (Spezialfälle). (i) Sei $A = \emptyset$, dann ist dies die absolute **MAYER-VIETORIS-Sequenz**.

(ii) Seien $X = X_1 = X_2$, dann ergibt sich die relative **MAYER-VIETORIS-Sequenz**.

(iii) Seien $A_1 = A_2 = \{p\}$, dann hat man die reduzierte **MAYER-VIETORIS-Sequenz**.

(iv) Seien $X_1 = X$ und $A_1 \subseteq A_2 = X_2$, so erhält man die Homologiesequenz eines Tripels.

3.9 Die Ausschneidungseigenschaft polyhedraler Triaden

Seien K ein (abstrakter) Simplicialkomplex und $K', K'' \subseteq K$ zwei Teilkomplexe.

$$X := |K|, X' := |K'|, X'' := |K''|$$

Ziel: Beweis der Aussage, daß die Triade (X, X', X'') ausschneidend ist.

Definition 3.9.1 (Geometrische Realisierung eines Simplicialkomplexes). Sei K Simplicialkomplex.

$$|K| := \bigcup_{s \in K} |s| \quad |s| := \left\{ \alpha: s \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{e \in s} \alpha(e) = 1 \right\}$$

Für $\alpha \in |K|$ schreiben wir

$$\alpha = \sum_{e \in V(K)} \alpha(e)e \quad V(K) := \text{Menge der Ecken}$$

Die $\alpha(e)$ heißen auch Koordinaten von α . Ein topologischer Raum, der homöomorph zu einem Raum der Gestalt $|K|$ ist, heißt **Polyeder**, falls K endlich ist, so heißt $|K|$ auch **endliches Polyeder**. Ein topologisches Paar, welches in $\text{Top}^{(2)}$ isomorph ist zu einem Paar der Gestalt

$$(|K|, |L|) \quad \text{mit} \quad L \text{ Teilkomplex,}$$

heißt **polyhedrales Paar**.

Bemerkungen

(i) Für jedes q -Simplex $s = \{e_0, \dots, e_q\}$ kann man $|s|$ mit Δ_q identifizieren:

$$|s| \rightarrow \Delta_q, \quad \alpha \mapsto (\alpha(e_0), \dots, \alpha(e_q)).$$

Dadurch bekommt $|s|$ die Struktur eines metrischen, also auch topologischen Raumes.

- (ii) Eine Teilmenge $A \subseteq |K|$ ist genau dann offen, wenn $A \cap |s|$ offen ist in $|s|$ für jedes $s \in K$.
 (iii) Eine Abbildung $f: |K| \rightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn alle Einschränkungen

$$f|_{|s|}: |s| \rightarrow X \text{ mit } s \in K$$

stetig sind.

Definition 3.9.2 (Baryzentrische Unterteilung eines Simplicialkomplexes). Sei K Simplicialkomplex, $|K| = \bigcup_{s \in K} |s|$. Für jedes Simplex $s = \{e_0, \dots, e_q\} \in K$ heißt der Punkt

$$b(s) := \alpha \in s \text{ mit } \alpha(e_i) = \frac{1}{q+1} \forall i$$

Baryzentrum von s (oder auch Baryzentrum von $|s|$).

Bemerkungen

- (i) s , $|s|$ und $b(s)$ bestimmen einander eindeutig. s ist die Menge der Ecken von K , in denen $b(s) \neq 0$ ist oder der Träger von $b(s)$.
 (ii) Ist

$$s_0 \subset \dots \subset s_q$$

eine echt aufsteigende Kette von Seiten von $s \in K$, so definieren wir eine Teilmenge

$$|s_0, \dots, s_q|^\circ := \left\{ \sum_{i=0}^q x_i b(s_i) \mid \sum_{i=0}^q x_i = 1, x_i > 0 \right\} \subseteq |s|,$$

deren Abschließung ein geometrisches Simplex der Dimension q ist (d. h. es ist homöomorph zum Standardsimplex). Also die $b(s_i)$ als Vektoren des von s erzeugten freien \mathbb{R} -Vektorraums linear unabhängig: $b(s_{i+1})$ ist keine Linearkombination von $b(s_0) \dots b(s_i)$, weil $b(s_{i+1})$ mindestens eine zusätzliche von 0 verschiedene Koordinate besitzt.

- (iii) Das geometrische Simplex $|s|$ (mit $s \in K$) ist die disjunkte Vereinigung aller Simplicies der Gestalt

$$|s_0, \dots, s_q|^\circ \text{ mit } s_0 \subset \dots \subset s_q \subseteq s \in K.$$

Denn: Sei $\alpha \in |s|$ und seien e_1, \dots, e_q die Ecken von s , in denen α ungleich 0 ist.

$$s' := \{e_1, \dots, e_q\}, \quad b := b(s')$$

Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in (0, 1)$ mit der Eigenschaft, daß $\alpha - x \cdot b$ in weniger als q Ecken ungleich 0 ist (in allen anderen Ecken gleich 0). Durch Wiederholen der Prozedur erhält man eine Darstellung von α als Linearkombination von Baryzentren, die zu einer echt absteigenden Folge von Seiten gehören.

- (iv) Wegen (iii) ist $|K|$ disjunkte Vereinigung aller Simplicies der Gestalt

$$|s_0, \dots, s_q|^\circ \text{ mit } s_0 \subset \dots \subset s_q \in K$$

Die Zerlegung von $|K|$ in diese Simplicies heißt *baryzentrische Unterteilung* von $|K|$ bezüglich K . Die Mengen der Gestalt

$$\{s_0, \dots, s_q\} \text{ mit } s_0 \subset \dots \subset s_q \in K$$

bilden abstrakten Simplicialkomplex K' , dessen geometrische Realisierung homöomorph zu $|K|$ ist. Der Komplex K' heißt *baryzentrische Unterteilung* von K .

3 Die singuläre Homologie

Definition 3.9.3 (Baryzentrische Umgebung eines Teilpolyeders). Seien K ein Simplizialkomplex, $L \subseteq K$ ein Teilkomplex. Dann ist L' ein Teilkomplex von K' . Die baryzentrische Umgebung von L in K ist die Menge

$$B(L) = B_K(L) \text{ mit } |L| \subseteq B(L) \subseteq |K|$$

mit: jedes Element von $|K'|$ ist von der Gestalt:

$$\sum_{i=0}^q x_i b(s_i) \text{ mit } \sum_{i=0}^q x_i = 1, x_i > 0, \quad s_0 \subset \dots \subset s_q \in K$$

$B(L)$ ist definiert als die Menge dieser Punkte mit $s_0 \in L$.

Bemerkungen

(i) Nach Konstruktion gilt

$$|L| = |L'| \subseteq B(L) \subseteq |K| = |K'|.$$

(ii) $B(L)$ ist eine offene Teilmenge von $|K|$.

(iii) $L, M \subseteq K$ Teilkomplexe $\Rightarrow B(L \cap M) = B(L) \cap B(M)$.

Beweis. zu (i): folgt direkt aus der Definition.

zu (ii): Es reicht zu zeigen:

$$B(L) \cap |s'| \text{ ist offen in } |s'| \quad \forall s' \in K'$$

s' hat die Gestalt

$$s' = \{s_0, \dots, s_q\}, \quad s_0 \subset \dots \subset s_q \in K$$

Ein Punkt der Realisierung von s' hat die Gestalt

$$\sum_{i=0}^q x_i b(s_i) \text{ mit } x_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^q x_i = 1 \quad (*)$$

Ist s_0 nicht in L , dann ist kein s_i in L und keiner der Punkte der Gestalt (*) liegt in $B(L)$. In dieser Situation ist $B(L) \cap |s'| = \emptyset$ offen in $|s'|$.

Sei jetzt $s_0 \in L$. Wir wählen r derart, daß gilt

$$s_0 \subset \dots \subset s_r \in L, \quad s_{r+1} \notin L.$$

Die Punkte von $|s'|$ haben die Gestalt (*). Die Punkte $|x|$, die in $B(L)$ liegen, sind gerade diejenigen, mit $x_i \neq 0$ für ein $i \leq r$:

$$B(L) \cap |s'| = \left\{ \sum_{i=0}^q x_i b(s_i) \in |s'| \mid x_0 + \dots + x_r > 0 \right\}$$

$\Rightarrow B(L) \cap |s'|$ ist der Durchschnitt von $|s'|$ mit der Teilmenge eines geeignet gewählten \mathbb{R}^{q+1} , die durch $x_0 + \dots + x_r > 0$ gegeben ist. Also ist $B(L) \cap |s'|$ offen in $|s'|$.

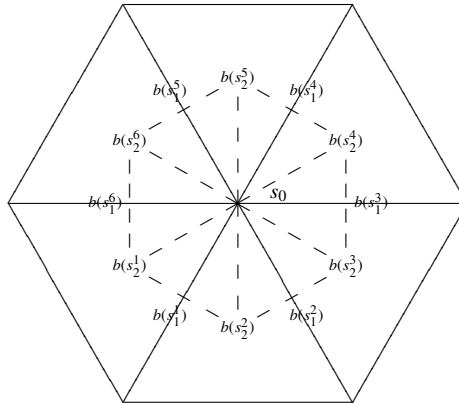
zu (iii): $B(L)$ ist die Vereinigung der offenen Simplizes

$$|s_0, \dots, s_q|^\circ \text{ mit } s_0 \subset \dots \subset s_q \in K, \quad s_0 \in L.$$

$B(M)$ ist dasselbe in grün, außer mit $s_0 \in M$. Die $|s_0, \dots, s_q|^\circ$ sind paarweise disjunkt. Also ist $B(L) \cap B(M)$ die Menge mit obigen Eigenschaften und $s_0 \in L \cap M$, also gleich $B(L \cap M)$. \square

Beispiele

(i) $|L| = \{p\} \cong s_0$



$B(L)$ heißt auch *Simplexstern* von p .

(ii) $|L| \cong [0, 1]$

(iii) $|L| = ([0, 1], 1/2) \vee ([0, 1], 1/2)$

Satz 3.9.4 (Baryzentrische Deformation eines polyhedralen Paares). *Seien K Simplicialkomplex, $L \subseteq K$ ein Teilkomplex. Dann gibt es eine Homotopie*

$$H_t = H_t^{K,L} : B(L) \rightarrow B(L)$$

mit

$$H_0 = \text{id}_{B(L)}, \quad H_1 \subseteq |L|, \quad H_t|_{|L|} = \text{id}_{|L|} \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

Inbesondere ist $|L|$ ein starker Deformationsretrakt von $B(L)$, d. h. die natürliche Einbettung

$$|L| \rightarrow B(L)$$

induziert einen Isomorphismus auf der Homologie

$$H(|L|) \rightarrow H(B(L)).$$

$H_t^{K,L}$ heißt auch baryzentrische Deformation von L in K bzw. des Paares (K, L) bzw. $(|K|, |L|)$.

Beweis. Sei $s' \in K'$.

$$s' = \{s_0, \dots, s_q\}, \quad s_0 \subset \dots \subset s_q \in K, \quad s_0 \subset \dots \subset s_r \in L, \quad s_{r+1} \notin L, \quad 0 \leq r \leq q$$

Wir definieren H_t auf

$$B(L) \cap |s'| = \left\{ \sum_{i=0}^q x_i b(s_i) \in |s'| \mid x_0 + \dots + x_r > 0 \right\}$$

wie folgt:

$$H_t \left(\sum_{i=0}^q x_i b(s_i) \right) := (1-t) \sum_{i=r+1}^q x_i b(s_i) + \frac{1 - (1-t) \sum_{i=r+1}^q x_i}{\sum_{i=0}^r x_i} \sum_{i=0}^r x_i b(s_i) \quad (*)$$

3 Die singuläre Homologie

H_t ist auf $B(L) \cap |s'|$ eine wohldefinierte Homotopie: die Summe der Koeffizienten der $b(s_i)$ ist 1. Diese Definitionen sind für die verschiedenen s' miteinander verträglich: die rechte erste Summe faßt diejenigen Summanden von $\sum_{i=0}^q x_i b(s_i)$ zusammen mit $s_i \notin L$. Die zweite Summe diejenigen mit $s_i \in L$.

Gültigkeit der drei Bedingungen zu H_t : Für $t = 0$ ist der Quotient vor der zweiten Summe rechts in (*) gleich 1. Also ist $H_0 = \text{id}$. Für $t = 1$ ist der erste Summand rechts in (*) gleich Null, d. h. der Wert von H_t liegt in $|L|$. Für Punkte aus $|L|$ ist

$$\sum_{i=0}^q x_i b(s_i) = \sum_{i=0}^r x_i b(s_i),$$

d. h. die erste Summe rechts in (*) ist Null. Der Wert von H_t liegt also in $|L|$. □

Satz 3.9.5 (Ausschneidungseigenschaft). *Seien $|K|$ ein Simplicialkomplex und $L', L'' \subseteq K$ zwei Teilkomplexe. Dann ist die Triade*

$$(|K|, |L'|, |L''|)$$

ausschneidend.

Beweis. OBdA sei $K = L' \cup L''$ (in den Bedingungen für „ausschneidend“ kommt $|K|$ nicht vor). Bezeichnungen:

$$X := |K| = |L'| \cup |L''|, \quad X' := |L'|, \quad X'' := |L''|, \quad B' := B_K(L') \quad B'' := B_K(L'').$$

Dann gilt:

$$X = X' \cup X'' \quad X = B' \cup B''.$$

Nach Konstruktion sind B' und B'' offen in $X = B' \cup B''$. Nach 3.8.2 Beispiel (i) ist (X, B', B'') eine Ausschneidungstriade, d. h. die Inklusion

$$(B', B' \cap B'') \rightarrow (B' \cup B'', B'') = (X, B'')$$

induziert einen Isomorphismus auf der Homologie. Betrachten wir die natürlichen Einbettungen:

$$\begin{array}{ccc} (B', B' \cap B'') & \longrightarrow & (X, B') \\ \uparrow & \cup & \uparrow \\ (X', X' \cap X'') & \longrightarrow & (X, X'') \end{array}$$

Anwenden von H liefert

$$\begin{array}{ccc} H(B', B' \cap B'') & \xrightarrow{\cong} & H(X, B') \\ \uparrow & \cup & \uparrow \\ H(X', X' \cap X'') & \longrightarrow & H(X, X'') \end{array}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen: die folgenden natürlichen Einbettungen erzeugen Isomorphismus auf der Homologie:

$$\begin{array}{ll} (X, X'') \rightarrow (X, B') & (*) \\ (X', X' \cap X'') \rightarrow (B', B' \cap B'') & (**) \end{array}$$

zu (*): Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_q X'' & \longrightarrow & H_q X & \longrightarrow & H_q(X, X'') & \longrightarrow & H_{q-1}(X'') & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \circlearrowleft & & \parallel & & \circlearrowleft & & \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow & & \dots \\
 \dots & \longrightarrow & H_q B'' & \longrightarrow & H_q X & \longrightarrow & H_q B'' & \longrightarrow & H_{q-1} B'' & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Nach dem Fünferlemma reicht es zu zeigen:

$$|L''| = X'' \rightarrow B'' = B(L'')$$

induziert einen Isomorphismus auf der Homologie. Das ist der Fall nach 3.9.4.

Zu (**): Wir betrachten

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_q(X', X'') & \longrightarrow & H_q X' & \longrightarrow & H_q(X', X' \cap X'') & \longrightarrow & H_{q-1}(X' \cap X'') & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow & & \dots \\
 \dots & \longrightarrow & H_q(B' \cap B'') & \longrightarrow & H_q B' & \longrightarrow & H_q(B', B' \cap B'') & \longrightarrow & H_{q-1}(B' \cap B'') & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Nach Fünferlemma reicht es zu zeigen: die natürlichen Einbettungen

$$X' \cap X'' \rightarrow B' \cap B'' \tag{(*)'}$$

$$X' \rightarrow B' \tag{(**)'}$$

induzieren Isomorphismen auf der Homologie. (**') gilt nach 3.9.4:

$$|L'| = X' \rightarrow B' = B(L')$$

(*') gilt nach 3.9.3 Bemerkung (iii)

$$|L' \cap L''| = |L'| \cap |L''| = X' \cap X'' \rightarrow B' \cap B'' = B(L') \cap B(L'') = B(L' \cap L'')$$

induziert Isomorphismus. □

Bemerkung:

Glatte Mannigfaltigkeiten sind Polyeder.

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

4.1 Standardabbildungen zwischen Zellen und Sphären

Definition 4.1.1. • $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ sei die Norm.

- $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$ heißt n -Sphäre.
- $B^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ heißt n -Kugel.
- $\mathring{B}^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ heißt offene n -Kugel.
- $Q := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ heißt Basispunkt von S^n .

Definition 4.1.2 (Standardabbildungen der Vollkugel).

$$\begin{aligned} \pi: (B^n, S^{n-1}) &\rightarrow (S^n, Q) \\ y &\mapsto \left(2\sqrt{1-\|y\|^2} \cdot y, 2\|y\|^2 - 1 \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

heißt Standardabbildung der n -Vollkugel.

$$\begin{aligned} \pi': \mathring{B}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \frac{y}{1-\|y\|} \end{aligned}$$

heißt Standardabbildung der offenen Vollkugel.

Die Abbildung π ist tatsächlich wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \|\pi(y)\|^2 &= 4(1-\|y\|^2)\|y\|^2 + (2\|y\|^2 - 1)^2 \\ &= 1 \\ \pi(S^{n-1}) &= (0, 2 \cdot 1 - 1) = (0, 1) = Q \end{aligned}$$

Lemma 4.1.3 (Eigenschaften der Standardabbildung). (i) $\pi^{-1}(Q) = S^{n-1}$, $\pi^{-1}(p)$ ist einpunktig für $p \in S^n \setminus \{Q\}$.

(ii) π induziert Homöomorphismen

$$\bar{\pi}: B^n / S^{n-1} \rightarrow S^n \quad \text{und} \quad \pi: \mathring{B}^n \rightarrow S^n \setminus \{Q\}$$

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

(iii) Die folgende Abbildung ist die Umkehrung von $\pi: \mathring{\mathcal{B}}^n \rightarrow \mathcal{S}^n \setminus \{Q\}$:

$$\rho: \mathcal{S}^n \setminus \{Q\} \rightarrow \mathring{\mathcal{B}}^n, \quad (z, t) \mapsto \frac{z}{\sqrt{z(1-t)}}.$$

Beweis. (i) $\pi(y) = Q \iff \sqrt{1 - \|y\|^2} \cdot y = 0, 2\|y\|^2 - 1 = 1 \iff y \in \mathcal{S}^{n-1}$.

Sei nun $p = (z, t) \in \mathcal{S}^n \setminus \{Q\}$. Es gilt

$$\pi(y) = p \iff 2\sqrt{1 - \|y\|^2} \cdot y = z \wedge 2\|y\|^2 - 1 = t$$

Falls $z = 0$, so haben wir $\|y\| = 1 \vee y = 0$. Nehmen wir $t = 1$, so folgt $p = Q$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muß daher sein $y = 0, t = -1$, also y eindeutig.

Falls $z \neq 0$ gilt, haben wir $y = \lambda z, 0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} 4(1 - |\lambda|^2 \|z\|^2) |\lambda|^2 &= 1 & \text{und} & & 2|\lambda|^2 \|z\|^2 - 1 &= t \\ & & & & \iff |\lambda|^2 &= \frac{t+1}{2\|z\|^2} \\ & & & & \iff 2 - 2|\lambda|^2 \|z\|^2 &= 2 - (t-1) = 1-t \\ \iff 2(1-t) |\lambda|^2 &= 1 & \text{und} & & |\lambda|^2 &= \frac{t+1}{2\|z\|^2} \\ \iff |\lambda|^2 &= \frac{1}{2(1-t)} = \frac{t+1}{2\|z\|^2} \end{aligned}$$

Es gibt also höchstens eine Lösung. Es gibt genau eine Lösung, falls gilt

$$\frac{1}{2(1-t)} = \frac{t+1}{2\|z\|^2} \iff \|z\|^2 = 1 - t^2 \iff \|z\|^2 + t^2 = 1 \iff (z, t) \in \mathcal{S}^n$$

(ii) Nach (i) induziert π eine bijektive Abbildung $\bar{\pi}: \mathcal{B}^n / \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow \mathcal{S}^n$ mit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{S}^{n-1} \\ \rho \downarrow & \cup & \nearrow \bar{\pi} \\ \mathcal{B}^n / \mathcal{S}^{n-1} & & \end{array}$$

$\bar{\pi}$ ist stetig, weil π stetig ist (Faktortopologie). $\mathcal{B}^n / \mathcal{S}^{n-1}$ ist kompakt, \mathcal{S}^{n-1} ist hausdorffsch. Also ist $\bar{\pi}$ ein Homöomorphismus. Die Homöomorphie von $\pi: \mathring{\mathcal{B}}^n \rightarrow \mathcal{S}^n \setminus \{Q\}$ folgt aus der von $\bar{\pi}$ und (i).

(iii) Man berechne $\rho(\pi(y))$ und $\pi(\rho(z, t))$. □

Lemma 4.1.4 (Eigenschaften der Standardabbildung π'). Die Standardabbildung $\pi': \mathring{\mathcal{B}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus mit der Umkehrung

$$\rho': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathring{\mathcal{B}}^n, \quad z \mapsto \frac{z}{1 + \|z\|}.$$

Der

Beweis. ist einfach. □

Satz 4.1.5 (Kompakte konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Teilmenge, welche eine n -Kugel enthält. Dann ist $(K, \partial K)$ homöomorph zu $(\mathcal{B}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ (d. h. isomorph in $\text{Top}^{(2)}$).*

Beweis. O. B. d. A. sei $\mathcal{B}^n \subseteq K$.

1. Schritt

Die Abbildung

$$\nu: \partial K \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}, \quad y \mapsto \frac{y}{\|y\|}$$

ist ein Homöomorphismus. Da ∂K kompakt, \mathcal{S}^{n-1} hausdorffsch, reicht es zu zeigen: ν ist bijektiv. Zunächst: ν ist surjektiv: Sei $z \in \mathcal{S}^{n-1}$. Bezeichne g die Gerade durch z und $0 \in \mathcal{B}^n \subseteq K$. Dann ist $g \cap K$ konvex und kompakt, also abgeschlossenes Intervall $[a, b]z$, welches den Ursprung enthält. bz ist ein Punkt von K , mit der Eigenschaft, daß in jeder Umgebung Punkte des Komplements von K liegen. (Insbesondere $b > 0$). Also ist $bz \in \partial K$, $\nu(bz) = \frac{bz}{\|bz\|} = z$.
 ν ist injektiv: Für je zwei Punkte $x', x'' \in \partial K$ mit selbem Bild gilt

$$x'' = \lambda x' \quad 0 < \lambda \in \mathbb{R}$$

O. B. d. A. sei $0 < \lambda < 1$. Es reicht zu zeigen: $x \in K$, $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda x$ liegt im Innern von K . Wir betrachten den von $B = \mathcal{B}^n$ und x erzeugten Kegel. Dann liegt λx im Innern dieses Kegels. Weil K konvex ist, liegt dieser Kegel in K , also lebt λx im Innern von K .

2. Schritt

Die „radiale Fortsetzung“ der Abbildung ν des ersten Schritts ist ein Homöomorphismus

$$K \rightarrow \mathcal{B}^n, \quad \lambda z \mapsto \frac{\lambda z}{\|\lambda z\|} \quad \text{für } z \in \partial K.$$

Es ist leicht zu zeigen, diese Abbildung ist stetig. Es reicht, da K kompakt und \mathcal{B}^n hausdorffsch, die Bijektivität zu zeigen. □

Korollar 4.1.6. (i) Der n -Kubus I^n ist homöomorph zu \mathcal{B}^n .

(ii) Δ_n ebenso.

(iii) Der Rand $\dot{\Delta}_n$ von Δ_n ist homöomorph zu \mathcal{S}^{n-1} .

4.2 Homologie von Zellen und Sphären

Lemma 4.2.1. *Es seien*

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_n &:= \{x \in \Delta_n \mid x_j = 0 \text{ für mindestens ein } j\} \\ \Lambda_n &:= \{x \in \dot{\Delta}_n \mid x_j = 0 \text{ für mindestens ein } j > 0\}. \end{aligned}$$

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

Λ_n heißt das 0-Horn von Δ_n . Es bestehen die folgenden Isomorphismen:

$$H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\delta} H_{q-1}(\dot{\Delta}_n, \Lambda_n) \xleftarrow{i_*} H_{q-1}(\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\}) \xleftarrow{\varepsilon_*^0} H_{q-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1})$$

Dabei seien:

δ der Zusammenhangshomomorphismus des Tripels $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n, \Lambda_n)$

i_* induziert von der natürlichen Einbettung $i: (\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\}) \rightarrow (\dot{\Delta}_n, \Lambda_n)$

ε_*^0 induziert von der natürlichen Einbettung $\varepsilon^0: (\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \rightarrow (\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\})$.

Beweis. Zur Bijektivität von δ : Es reicht zu zeigen: $H_q(\Delta_n, \Lambda_n) = 0 \forall q$. Wir betrachten die stetige Familie

$$h_t: (\Delta_n, \Lambda_n) \rightarrow (\Delta_n, \Lambda_n) \\ x \mapsto (1-t)x + te^0$$

für $t = 0$ ist $h_0 = \text{id}$, für $t = 1$ ist $\text{Im } h_1 = \{e^0\}$. Daher:

$$0 = H(h_1) = H(h_0) = \text{id}$$

$\Rightarrow H(\Delta_n, \Lambda_n) = 0$.

Die Bijektivität von i_* folgt aus dem Ausschneidungssatz. Zur Bijektivität von ε_*^0 : Es reicht zu zeigen: ε^0 ist Homotopieäquivalenz. Dazu betrachten wir die stetige Familie

$$s_t: (\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\}) \rightarrow (\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\}) \\ x \mapsto x(t) \\ \text{mit } x_j(t) = \begin{cases} (1-t)x_0 & j = 0 \\ \frac{1-(1-t)x_0}{1-x_0} x_j & j > 0 \end{cases}$$

s_t ist wohldefiniert:

$$\sum_{j=0}^n x_j(t) = (1-t)x_0 + \frac{1-(1-t)x_0}{1-x_0}(1-x_0) = 1$$

Weiter gilt: $x_j = 0 \Rightarrow x_j(t) = 0$, also $s_t(\dot{\Delta}_n) \subseteq \dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}$ und $s_t(\Lambda_n \setminus \{e^0\}) \subseteq \Lambda_n \setminus \{e^0\}$. Für $t = 0$ ist $s_0 = \text{id}$. Für $t = 1$ ist $\text{Im } s_1 \subseteq 0$ -te Seite = $\varepsilon^0(\Delta_{n-1})$. $s_t(0$ -te Seite) $\subseteq 0$ -te Seite. Also ist $(\varepsilon^0\Delta_{n-1}, \varepsilon^0\dot{\Delta}_{n-1})$ ein starker Deformationsretrakt von $(\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\})$. \square

Satz 4.2.2 (Homologie von Zellen und Sphären). (i) $\tilde{H}_q(\mathcal{S}^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n \end{cases}$

$$(ii) H_q(\mathcal{B}^n, \mathcal{S}^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n \end{cases}$$

$$(iii) H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{p\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n \end{cases}$$

Beweis. Zu (ii):

$$\begin{aligned}
 H_q(\mathcal{B}^n, \mathcal{S}^{n-1}) &\cong H_q(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) && \text{nach 4.1.5} \\
 &\cong H_{q-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) && \text{nach 4.2.1} \\
 &\vdots \\
 &\cong H_{q-n}(\Delta_0, \underbrace{\dot{\Delta}_0}_{=\emptyset}) && \text{auch nach 4.2.1} \\
 &\cong H_{q-n}(\Delta_0) = H_{q-n}(P) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zu (i): \mathcal{B}^{n+1} ist kontrahierbar, d. h. $\tilde{H}(\mathcal{B}^{n+1}) = 0$. Die reduzierte Homologiesequenz von $(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n)$ liefert

$$\tilde{H}_q(\mathcal{S}^n) \cong H_{q+1}(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n).$$

Die Behauptung folgt aus (ii).

Zu (iii): O. B. d. A. sei $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ der Ursprung. Es reicht zu zeigen: die Einbettung

$$i: (\mathcal{B}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

induziert Isomorphismus auf der Homologie. Wir betrachten die Homologiesequenzen der Paare $(\mathcal{B}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ und $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und den durch i induzierten Komplexmorphismus zwischen diesen Homologiesequenzen. Nach dem Fünferlemma reicht es zu zeigen, i induziert Isomorphismen

$$H_q(\mathcal{B}^n) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n) \tag{*}$$

$$H_q(\mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \tag{**}$$

für alle q . Zu (*): Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & \cup & \\
 & \{0\} &
 \end{array}$$

von natürlichen Einbettungen induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(\mathcal{B}^n) & \xrightarrow{i_*} & H_q(\mathbb{R}^n) \\
 & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\
 & \cong & \cup \\
 & H_q(\{0\}) &
 \end{array}$$

α und β sind Isomorphismen, weil \mathcal{B}^n und \mathbb{R}^n kontrahierbar sind. Also ist i_* ein Isomorphismus.

Zu (**): \mathcal{S}^{n-1} ist starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vergleiche Beispiel 3.5.8. \square

Korollar 4.2.3 (Sphären und euklidische Räume verschiedener Dimensionen). (i) Sphären verschiedener Dimension sind nicht homöomorph.

(ii) \mathbb{R}^n ist homöomorph zu $\mathbb{R}^m \iff m = n$.

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

Beweis. Zu (i): Folgt direkt aus 4.2.2 (i).

Zu (ii): Sei $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$. Dann ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Dann induziert f einen Homöomorphismus

$$f': \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

also einen Isomorphismus

$$f_*: H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}).$$

Nach 4.2.2 (iii) gilt

$$H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}.$$

Wiederum nach 4.2.2 (iii) muß $n = m$ sein. □

Satz 4.2.4 (Sphären und Vollkugeln). S^{n-1} ist kein Retrakt von \mathcal{B}^n .

Beweis. Angenommen, es gibt Retraktion

$$r: \mathcal{B}^n \rightarrow S^{n-1}.$$

Weil die Zusammensetzung

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} \mathcal{B}^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$$

der Retraktion r mit der Einbettung i die Identität ist, ist

$$\begin{array}{c} \tilde{H}S^{n-1} \xrightarrow{i_*} \tilde{H}\mathcal{B}^n \xrightarrow{r_*} \tilde{H}S^{n-1} \\ \cong \mathbb{Z} \qquad \qquad \qquad = 0 \qquad \qquad \qquad \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

auch die Identität, widersprüchlicherweise. □

Satz 4.2.5 (Einbettungen von Vollkugeln in den euklidischen Raum). Sei $f: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung.

(i) Es gilt $f(y) = 0$ für ein $y \in \mathcal{B}^n$ oder $f(z) = \lambda z$ für ein $z \in S^{n-1}$, $\lambda > 0$.

(ii) Es gilt: $f(y) = y$ für ein $y \in \mathcal{B}^n$ oder $f(z) = \lambda z$ für ein $z \in S^{n-1}$ und ein $\lambda > 1$.

Beweis. Zu (i): Wir betrachten die Abbildung

$$\rho: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{cases} (2\|x\| - 1) \cdot x - (2 - 2\|x\|)f(x/\|x\|) & \text{für } \|x\| \geq 1/2 \\ -f(4\|x\|x) & \text{für } \|x\| \leq 1/2 \end{cases}$$

Für $\|x\| = 1/2$ gilt:

$$-f(4\|x\|x) = -f(2x) = \underbrace{(2\|x\| - 1)}_0 \cdot x - \underbrace{(2 - 2\|x\|)}_1 f(\underbrace{x/\|x\|}_{2x}),$$

also ist ρ stetig.

Falls ρ keine Nullstelle besitzt, ist

$$\mathcal{B}^n \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{\rho(x)}{\|\rho(x)\|}$$

wohldefiniert und stetig mit Einschränkung

$$\mathcal{S}^{n-1} \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|} = x$$

Eine solche Abbildung existiert aber nicht wegen 4.2.4. Also hat ρ eine Nullstelle $x_0 \in \mathcal{B}^n$, $\rho(x_0) = 0$. x_0 kann nicht auf dem Rand von \mathcal{B}^n liegen, denn dort gilt $\rho(x) = x$, es gilt daher $\rho(x_0) = 0$ für $x_0 \in \mathring{\mathcal{B}}^n$.

Im Fall $\|x_0\| \leq 1/2$ gilt:

$$-f(y) = 0 \text{ mit } y = 4\|x_0\| x_0 \in \mathring{\mathcal{B}}^n$$

Im Fall $\|x_0\| \geq 1/2$ gilt:

$$f(y) = \underbrace{\frac{2\|x_0\| - 1}{2 - 2\|x_0\|}}_{>0} \|x_0\| \cdot y \text{ mit } y = \frac{x_0}{\|x_0\|} \in \mathcal{S}^{n-1}$$

Zu (ii): Wir betrachten die Abbildung

$$g: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto f(x) - x$$

Nach (i) gibt es ein $y \in \mathcal{B}^n$ mit

$$f(y) - y = 0$$

oder ein $z \in \mathcal{S}^{n-1}$ mit

$$f(z) - z = \lambda z \text{ mit } \lambda > 0 \quad f(z) = (\lambda + 1)z$$

□

Satz 4.2.6 (Fixpunktsatz von BROUWER). *Jede stetige Abbildung*

$$f: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}^n$$

hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Hätte f keinen Fixpunkt, so gäbe es nach 4.2.5 (ii) ein $z \in \mathcal{S}^{n-1}$ und ein $\lambda > 1$ mit $f(z) = \lambda z$, also

$$\|f(z)\| = \lambda \|z\| = \lambda > 1$$

im Widerspruch zu $f(z) \in \mathcal{B}^n$.

□

Satz 4.2.7 (Fundamentale Zyklen). *Die identische Abbildung*

$$i_n: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$$

ist ein n -Zyklus modulo $\dot{\Delta}_n$. Seine Homologiekategorie erzeugt $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$, d. h.

$$H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}[i_n].$$

Der Rand von i_n ist ein Zyklus des Raums $\dot{\Delta}_n$. Seine Homologiekategorie erzeugt $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$, d. h.

$$\tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n) = \mathbb{Z}[\partial i_n]$$

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

Beweis. Es gilt $\tilde{H}(\Delta_n) = 0$, d. h.

$$H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$$

ist ein Isomorphismus. Es gilt

$$\delta([i_n]) = [\partial i_n]$$

Die beiden Aussagen von 4.2.7 sind also äquivalent. Wir zeigen die erste und benutzen Induktion nach n .

Für $n = 0$ gilt: $H_0(\Delta_0, \underbrace{\dot{\Delta}_0}_{=\emptyset}) = H_0(\Delta_0) = \mathbb{Z}[i_0]$.

Für $n > 0$ und $n - 1$ bereits gezeigt: $H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \cong \mathbb{Z}[i_{n-1}]$

Wir wenden nun Lemma 4.2.1 an, um diese Gruppe mit $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ zu identifizieren. Die Homologie von $H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \Lambda_n)$ wird erzeugt von

$$\begin{aligned} i_* \varepsilon_*^0 [i_{n-1}] &= [\varepsilon^0 : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n] \\ &= \left[\sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon^i \right] \\ &= \text{Bild von } [i_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n] \text{ bei } H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, \Lambda_n) \end{aligned}$$

Dem $[i_{n-1}]$ entspricht also gerade die Homologiekategorie $[i_n]$ in $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$. \square

Satz 4.2.8 (Produkte mit Sphären). *Seien $p \in \mathcal{S}^n$ und Y beliebiger topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) $H_q(\mathcal{S}^n \times Y, \{p\} \times Y) = H_{q-n}(Y)$

(ii) $H_q(\mathcal{B}^n \times Y, \mathcal{S}^{n-1} \times Y) = H_{q-n}(Y)$

(iii) $H_q(\mathcal{S}^n \times Y) = H_{q-n}(Y) \oplus H_q(Y)$, $[z] \mapsto (\rho_*[z], p_*[z])$; dabei sei $p: \mathcal{S}^n \times Y \rightarrow Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor. ρ_* komme von der Einbettung $\mathcal{S}^n \times Y \subseteq (\mathcal{S}^n \times Y, \{p\} \times Y)$ und dem Isomorphismus von (i).

Beweis. Zu (ii): Der Beweis ist analog zum Beweis von 4.2.2. Wie dort hat man Isomorphismen

$$H_q((\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \times Y) \xrightarrow{\delta} H_{q-1}((\dot{\Delta}_n, \Lambda_n) \times Y) \xleftarrow{i_*} H_{q-1}((\dot{\Delta}_n \setminus \{e^0\}, \Lambda_n \setminus \{e^0\}) \times Y) \xleftarrow{\varepsilon_*^0} H_{q-1}((\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \times Y)$$

dabei gilt $(A, B) \times Y = (A \times Y, B \times Y)$. Insbesondere ist

$$H_q((\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \times Y) \cong H_{q-1}((\Delta_0, \dot{\Delta}_0) \times Y) \cong H_q(Y).$$

Wegen $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong (\mathcal{B}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ ist dies die Behauptung.

Zu (i): Wir betrachten

$$(\mathcal{B}^{n+1} \times Y, \mathcal{S}^n \times Y, \{p\} \times Y)$$

$\{p\} \subseteq \mathcal{B}^{n+1}$ ist Homotopieäquivalenz ebenso wie $\{p\} \times Y \subseteq \mathcal{B}^{n+1} \times Y$. Also ist $H(\mathcal{B}^{n+1} \times Y, \{p\} \times Y) = 0$. Die lange Homologiesequenz des Tripels liefert deshalb einen Isomorphismus:

$$H_q(\mathcal{B}^{n+1} \times Y, \mathcal{S}^n \times Y) \cong H_{q-1}(\mathcal{S}^n \times Y, \{p\} \times Y),$$

d. h. (i) folgt aus (ii).

Zu (iii): $S^n \times Y \rightarrow \{p\} \times Y, (s, y) \mapsto (p, y)$ ist eine Retraktion. Deshalb erhalten wir nach 3.4.13 eine zerfallende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H(\{p\} \times Y) \rightarrow H(S^n \times Y) \rightarrow H(S^n \times Y, \{p\} \times Y) \rightarrow 0.$$

Die Behauptung folgt aus (ii). □

Bemerkung

KÜNNETH-Formeln: Für sehr viele Räume gilt:

$$H_q(X \times Y) = \bigoplus_{i+j=q} H_i(X) \otimes H_j(Y)$$

4.3 Lokale Homologie

Bemerkung 4.3.1. \mathbb{R}^n und S^{n+1} sind lokal homöomorph, aber $H(\mathbb{R}^n) \neq H(S^{n+1})$. Gesucht sind Homologie-Gruppen, die die lokale Struktur von Räumen erfassen.

Definition 4.3.2 (Lokale Homologie). Sei X ein topologischer Raum, $p \in X$. Dann heißt

$$H_q(X, X \setminus \{p\}) \quad (=: H_q(X, X - p))$$

q -te lokale Homologie von X in p . Der Punkt p heißt abgeschlossen, falls $\overline{\{p\}} = \{p\}$ gilt.

Satz 4.3.3 (Lokalität). Seien X ein topologischer Raum, $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt und $U \subseteq X$ eine offene Umgebung. Dann induziert die natürliche Einbettung

$$(U, U - p) \rightarrow (X, X - p)$$

einen Isomorphismus auf der Homologie:

$$H_q(U, U - p) \xrightarrow{\cong} H_q(X, X - p) \quad \forall q$$

Beweis. $F = X \setminus U$ ist abgeschlossen, $F \subseteq X - p$ ist offen in X . Die Behauptung folgt aus dem Ausschneidungssatz 3.7.5. □

Definition 4.3.4 (p -Abbildungen und Abbildungskeime). Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ abgeschlossener Punkt, U offene Umgebung von p , $f: U \rightarrow Y$ stetige Funktion. f heißt p -Abbildung, wenn es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p gibt mit $f(V - p) \subseteq Y \setminus f(p)$ (d. h. p liegt isoliert in seiner Faser $f^{-1}(f(p))$).

Bemerkung

Eine p -Abbildung induziert einen Homomorphismus der lokalen Homologie

$$f_*^p: H_q(X, X - p) \cong H_q(U, U - p) \xrightarrow{f|_U} H_q(Y, Y \setminus f(p)).$$

Zwei stetige Abbildungen $f: U \rightarrow Y$, $f': U' \rightarrow Y$, die in einer Umgebung des Punktes $p \in X$ definiert sind, heißen p -äquivalent, wenn sie in einer Umgebung von p übereinstimmen. Die p -Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Keime in p . Die Äquivalenzklasse von f wird mit f^p bezeichnet.

Bemerkung

Der Begriff des Keims ersetzt den Begriff der Potenzreihe im Fall beliebiger stetiger Funktionen.

Satz 4.3.5 (*p*-Abbildungen mit dem selben Keim). Seien X, Y , topologische Räume, $p \in X$ abgeschlossener Punkt, U, V offene Umgebungen von p und $f: U \rightarrow Y, g: V \rightarrow Y$ Abbildungen mit dem selben Keim in p .

Dann induzieren f und g die selbe Abbildung auf der lokalen Homologie:

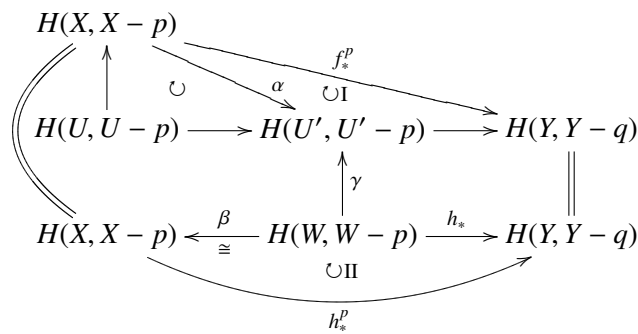
$$H(X, X - p) \rightarrow H(Y, Y \setminus f(p))$$

$=_{g(p)=q}$

Beweis. Seien $U' \subseteq U$ und $V' \subseteq V$ offene Umgebungen von p mit

$$f(U' - p) \subseteq Y - q, \quad g(V' - p) \subseteq Y - q.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung W von p mit $W \subseteq U' \cap V'$ und $f|_W = g|_W = h$. Es reicht zu zeigen: $f_*^p = h_*^p$. Wir betrachten das kommutative Diagramm



α, β, γ seien induziert durch die entsprechenden natürlichen Einbettungen. I, II sind kommutativ nach Definition von f_*^p und h_*^p . α und β sind Isomorphismen aufgrund des Ausschneidungssatzes. Aus der Kommutativität des ganzen Diagramms folgt $f_*^p = h_*^p$. □

Definition 4.3.6 (Kategorie Top_* der Keime von p -Abbildungen). Top_* sei die Kategorie mit

$$\begin{aligned} |\text{Top}_*| &:= \{ \text{punktierte topologische Räume mit abgeschlossenem Basispunkt} \} \\ &= \{ (X, p) \mid X \in \text{Top}, p \in X, \overline{\{p\}} = \{p\} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Top}_*}((X, p), (Y, q)) &:= \{ \text{Keime von } p\text{-Abbildungen auf } X, \text{ die in } p \text{ den Wert } q \text{ annehmen} \} \\ &= \{ f^p \mid f: U \rightarrow Y \text{ } p\text{-Abbildung, } U \subseteq X \text{ Umgebung von } p, f(p) = q \} \end{aligned}$$

Die Morphismenkomposition ist folgendermaßen definiert: Seien $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Top}_*}((X, p), (Y, q))$ und $\beta \in \text{Hom}_{\text{Top}_*}((Y, q), (Z, r))$. Seien $f: U \rightarrow Y$ und $g: V \rightarrow Z$ p - bzw. q -Abbildungen mit $f^p = \alpha$, $g^q = \beta$. Wir wählen offene Umgebungen $U' \subseteq U$ bzw. $V' \subseteq V$ von p bzw. q mit $f(U' - p) \subseteq Y - q$, $g(V' - q) \subseteq Z - r$. Durch Verkleinern von U' können wir erreichen

$$f(U' - p) \subseteq V' - q$$

(man ersetze U' durch $U' \cap f^{-1}(V')$). Dann ist die Komposition von $f|_{U'}$ mit $g|_{V'}$ definiert als

$$h = (g|_{V'}) \circ (f|_{U'}): U' \rightarrow Y$$

und es gilt: $h(U' - p) \subseteq Z - r$, d. h. h ist eine p -Abbildung. Wir setzen $\beta \circ \alpha = h$. Diese Konstruktion ist von der Wahl der Repräsentanten f, g und der Umgebungen U', V' unabhängig.

Bemerkung

Die Aussage von 4.3.5 besagt gerade, der Funktor

$$|\text{Top}_*| \rightarrow \text{Ab}, \quad (X, p) \mapsto H_q(X, X - p)$$

faktorisiert sich über Top_* :

$$\text{Top}_* \rightarrow \text{Ab}, \quad (X, p) \mapsto H_q(X, X - p).$$

Satz 4.3.7 (Lokale Homologie lokal homöomorpher Räume). *Seien $p \in X$ und $q \in Y$ abgeschlossene Punkte, welche Umgebungen $U \subseteq X$ bzw. $V \subseteq Y$ besitzen, welche homöomorph sind, d. h. es gebe einen Homöomorphismus*

$$h: (U, p) \rightarrow (V, q).$$

Dann gilt $H_i(X, X - p) \cong H_i(Y, Y - q) \forall i$.

Beweis. h definiert einen Isomorphismus $(X, p) \rightarrow (Y, q)$ in Top_* . □

Satz 4.3.8 (Invarianz der Dimension). *Seien $p \in \mathbb{R}^m$ und $q \in \mathbb{R}^n$ Punkte, welche homöomorphe punktierte Umgebungen (U, p) bzw. (V, q) besitzen. Dann gilt $m = n$.*

Beweis. Nach 4.3.7 gilt

$$H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - p) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - q) \quad \forall i.$$

Das geht nur, wenn $m = n$. □

Die Menge $\mathbb{R}_+^n := \{ (x_1, \dots, x_n) = \lambda \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0 \}$ heißt *positiver Halbraum* des \mathbb{R}^n .

Satz 4.3.9 (Invarianz der Randeigenschaft). *Wenn zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}_+^n$ homöomorphe punktierte Umgebungen (U, p) , (V, q) besitzen, so liegen entweder beide Punkte auf dem Rand oder beide im Inneren von \mathbb{R}_+^n :*

$$p, q \in \partial \mathbb{R}_+^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \} \vee p, q \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0 \}$$

Beweis. Seien $p \in \partial \mathbb{R}_+^n$, $q \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^n$. Wir betrachten folgende Familie stetiger Abbildungen:

$$\begin{aligned} h_t: (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - p) &\rightarrow (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - p) \\ x &\mapsto tx + (1-t)q \end{aligned}$$

$h_t(q) = q$, h_t kontrahiert $(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - p)$ in $(\{q\}, \{q\})$. Also ist $(\{q\}, \{q\})$ starker Deformationsretrakt von $(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - p)$. Daher gilt $H(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - p) = H(\{q\}, \{q\}) = 0$. $q \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^n$, also gibt es offene Vollkugel $U \subseteq \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^n$ um den Punkt q . Es gilt

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - q) &= H_n(U, U - q) \\ &= H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - q) = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Daher haben p, q keine homöomorphen Umgebungen. □

Satz 4.3.10 (Lokale und reduzierte Homologie). *Seien X ein topologischer Raum, $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, welcher eine Umgebung $U \subseteq X$ besitzt mit $\tilde{H}(U) = 0$.*

Dann gilt für jedes q :

$$H_q(X, X - x) \cong H_{q-1}(U - p)$$

Bemerkung

- (i) Umgebungen U mit $\tilde{H}(U) = 0$ heißen *azyklisch*.
- (ii) kontrahierbare Umgebungen sind azyklisch.
- (iii) fordert man anstelle von $\tilde{H}(U) = 0$, daß die Abbildung

$$H_q U \rightarrow \tilde{H}_q X$$

die Nullabbildung ist, so gilt wenigstens

$$H_q(X, X - p) \cong \ker(\tilde{H}_{q-1}(U - x) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U))$$

Beweis. Die reduzierten Homologiesequenzen zu $(U, U - x)$ und $(X, X - x)$ liefern ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_q U & \xrightarrow{\beta} & H_q(U, U - x) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(U - x) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1} U \\ \downarrow (i_U)_* = \alpha & & \downarrow i_* & & & & \\ \tilde{H}_q X & \longrightarrow & H_q(X, X - x) & & & & \end{array}$$

mit $i: (U, U - x) \hookrightarrow (X, X - x)$. i_* ist nach Ausschneidungssatz ein Isomorphismus. Ist U azyklisch, so ist δ ein Isomorphismus, d. h. wie behauptet ist

$$H_q(X, X - x) \cong \tilde{H}_{q-1}(U - x).$$

Ist α gleich 0, so ist auch β gleich 0, also δ injektiv. Also:

$$\begin{aligned} H_q(X, X - x) &\cong H_q(U, U - x) \cong \text{Im}(\delta) \\ &= \ker(\tilde{H}_{q-1}(U - x) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U)) \end{aligned}$$

□

4.4 Grad einer Abbildung

Bemerkung 4.4.1. Ein Endomorphismus $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ hat stets die Gestalt

$$g \mapsto dg \quad d = \varphi(1)$$

Definition 4.4.2 (Grad einer Abbildung). Seien

$$\begin{aligned} f: \mathcal{S}^n &\rightarrow \mathcal{S}^n \\ g: (\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) &\rightarrow (\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) \end{aligned}$$

stetige Abbildungen. Ihre Grade $\deg f$ bzw. $\deg g$ sind durch folgende Bedingung definiert:

$$\begin{aligned} f_*(x) &= \deg f \cdot x \quad \text{für } x \in H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z} \\ g_*(y) &= \deg g \cdot y \quad \text{für } y \in H_{n+1}(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Satz 4.4.3 (Eigenschaften des Grades). (i) $\deg(\text{id}) = 1$

(ii) $\deg(f \circ f') = \deg(f) \cdot \deg(f')$

(iii) $f \simeq f' \text{ homotop} \Rightarrow \deg(f) = \deg(f')$

(iv) $\deg(f) = \pm 1$ falls f Homotopieäquivalenz ist.

(v) Für jede stetige Abbildung $g: (\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) \rightarrow (\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n)$ gilt

$$\deg(g) = \deg(g|_{\mathcal{S}^n})$$

Beweis. (i) und (ii) folgen aus der Funktorialität der Homologie. (iii) folgt aus der Homotopieinvarianz der Homologie. (iv) folgt aus (i), (ii) und (iii).

Zu (v): für $n > 0$ liefert g ein kommutatives Viereck:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \cong H_{n+1}(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) & \xrightarrow{g_*} & H_{n+1}(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z} \\ \delta \downarrow \cong & & \delta \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} \cong H_n(\mathcal{S}^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

$f = g|_{\mathcal{S}^n}: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$. δ ist ein Isomorphismus, da \mathcal{B}^{n+1} kontrahierbar (wegen der reduzierten Homologiesequenz von $(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n)$). Da das Diagramm kommutiert, gilt $\deg g = \deg f$. \square

Satz 4.4.4 (Grade einiger linearer Abbildungen). (i) Der Grad einer linearen Abbildung

$$f: (\Delta_n, \hat{\Delta}_n) \rightarrow (\Delta_n, \hat{\Delta}_n)$$

welche Ecken von Δ_n permutiert, ist gleich dem Vorzeichen der zugehörigen Permutation:

$$\deg f = \text{sign}(f|_{\{e^0, \dots, e^n\}})$$

(ii) Der Grad einer orthogonalen Abbildung

$$f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$$

ist gleich deren Determinante:

$$\deg f = \det f$$

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

(iii) Der Grad der antipodalen Abbildung

$$f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n, \quad x \mapsto -x$$

ist

$$\deg f = (-1)^{n+1}$$

Beweis. Zu (i): Wir können annehmen $f|_{\{e^0, \dots, e^n\}}$ ist ein Nachbartausch. Bezeichnung für die lineare Abbildung

$$\nu: \Delta_r \rightarrow \Delta_n, \quad e_i \mapsto e_{\nu_i}, \quad \nu = (\nu_0, \dots, \nu_r)$$

Dann gilt

$$\nu \circ \mathcal{E}^j = (\nu_0, \dots, \hat{\nu}_j, \dots, \nu_r)$$

zu zeigen: ist ν ein Nachbartausch, so gilt

$$H_n(\Delta_n, \hat{\Delta}_n) \ni [(\nu_0, \dots, \nu_r)] = \text{sign}(\nu)[(0, \dots, r)]$$

ν sollte Nachbartausch sein: $\nu = (0, \dots, i-1, i+1, i, i+2, \dots, r)$. Wir betrachten

$$\mu = (0, \dots, i-1, i+1, i, i+1, i+2, \dots, r)$$

Es gilt

$$\partial\mu = (-1)^i(1, \dots, r) + (-1)^{i+2}(0, \dots, i-1, i+1, i, i+2, \dots, r) + R$$

Dabei ist R eine Linearkombination von Simplizes, in denen eine Ecke nicht vorkommt, d. h. von Simplizes aus $\hat{\Delta}_r$. In $H_r(\Delta_r, \hat{\Delta}_r)$ gilt also

$$0 = (-1)^i[(0, \dots, r)] + (-1)^{i+2}[\nu] + \underset{=0}{[R]}$$

Also $[\nu] = -[(0, \dots, r)]$.

Zu (ii): Sei $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ eine orthogonale Abbildung. 1. Fall: $\det f = 1$. f ist Zusammensetzung ebener Drehungen. Zu zeigen: $\deg f = 1$. Es reicht zu zeigen: jede ebene Drehung ist homotop zur identischen Abbildung (denn dann ist f homotop zu id und es gilt $\deg f = \deg \text{id} = 1$). Wir basteln uns eine Deformation einer ebenen Drehung in die identische Abbildung, z. B. mit:

$$M(f) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

haben wir die Deformation

$$M(f_t) = \begin{pmatrix} \cos t\varphi & \sin t\varphi \\ -\sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2. Fall: $\det f = -1$. f ist homotop zu einer Hyperebene H . O. B. d. A. sei f gleich dieser Spiegelung. O. B. d. A. sei H die Hyperebene

$$H: x_0 - x_1 = 0$$

$\Rightarrow f$ vertauscht gerade die ersten beiden Geraden

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_0, x_2, \dots, x_n)$$

Sei $s := \text{convH}\{e_0, \dots, e_n, -\sum_{i=0}^n e_i\}$. f induziert eine lineare Abbildung auf s , die die ersten beiden Ecken vertauscht. Nach (i) ist $\deg|_{(s, \partial s)} = -1$, d. h. induziert

$$f_*: H_{n+1}(s, \partial s) \rightarrow H_{n+1}(s, \partial s), \quad \alpha \mapsto -\alpha.$$

Sei

$$g: \partial s \rightarrow \mathcal{S}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

die Projektion von ∂s auf die Oberfläche $\partial \mathcal{B}^{n+1} = \mathcal{S}^n$,

$$h: s \rightarrow \mathcal{B}^{n+1}, \quad t \cdot x \mapsto t \frac{x}{\|x\|}$$

die radiale Fortsetzung von g . Nach 4.1.5 ist h ein Homöomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) & \xrightarrow{f} & (\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n) \\ \approx \downarrow h & \cup & \approx \downarrow h \\ (s, \partial s) & \xrightarrow{f} & (s, \partial s) \end{array}$$

Weil h jeden Punkt in ein reelles Vielfaches dieses Punktes überführt, ist dieses Diagramm kommutativ.

$$\Rightarrow \deg f|_{\mathcal{S}^n} = \deg f|_{(\mathcal{B}^{n+1}, \mathcal{S}^n)} = \deg f|_{(s, \partial s)} = -1$$

Zu (iii): Spezialfall von (i). □

Satz 4.4.5 (Stetige Abbildungen der \mathcal{S}^n). Sei $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ stetig.

(i) Falls f keinen Fixpunkt besitzt, gilt $\deg f = (-1)^{n+1}$.

(ii) Falls f keine antipodalen Punkte besitzt, d. h. keine Punkte mit $f(x) = -x$, dann gilt

$$\deg f = 1.$$

Beweis. Zu (i): Habe f keinen Fixpunkt, Dann hat

$$d_t: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto (1-t)f(x) - tx, \quad 0 \leq t \leq 1$$

keine Nullstelle. Wir erhalten stetige Familie

$$D_t: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n, \quad x \mapsto \frac{d_t(x)}{\|d_t(x)\|}.$$

Es gilt

$$D_0(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x), \quad D_1(x) = \frac{-x}{\|-x\|} = -x$$

f ist homotop zu $\mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n, x \mapsto -x$, d. h. $\deg f = \deg(x \mapsto -x) = (-1)^{n+1}$.

Zu (ii): Die Abbildung

$$g(x) = -f(x)$$

hat keinen Fixpunkt, also den Grad $(-1)^{n+1}$.

$$(-1)^{n+1} \cdot \deg f = \deg(-\text{id}) \deg f = \deg(-f) = (-1)^{n+1}$$

also $\deg f = 1$. □

Satz 4.4.6 (Satz vom Igel). Sei $f: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Tangentialvektorfeld, d. h. f sei stetig und für jedes $x \in \mathcal{S}^2$ sei $f(x)$ ein Tangentialvektor an \mathcal{S}^2 im Punkt x , d. h. $f(x) \perp x$. Dann hat f mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Angenommen, f besitze keine Nullstelle. Dann ist $g: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2, x \mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ wohldefiniert und stetig. Nach Konstruktion sind x und $g(x)$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren, d. h. $g(x) \neq \pm x$ für $x \in \mathcal{S}^2$. Also gilt

$$\deg g = (-1)^3 = -1 \quad \text{aber auch} \quad \deg g = 1. \quad \zeta$$

□

Bemerkungen

- (i) Eine andere Formulierung lautet: Ein Igel läßt sich nicht kämmen.
- (ii) Ein *Tangentialbündel* von \mathcal{S}^2 ist die Menge

$$T\mathcal{S}^2 = \{ (x, v) \in \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid v \perp x \}$$

Die Abbildung

$$\pi: T\mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2, \quad (x, v) \mapsto x,$$

Die jedem Vektor seinen Angriffspunkt zuordnet, ist stetig. Ein *Tangentialvektorfeld* auf \mathcal{S}^2 ist gerade ein Schnitt von π , d. h. eine stetige Abbildung

$$s: \mathcal{S}^2 \rightarrow T\mathcal{S}^2, \quad x \mapsto s(x) \quad \text{mit} \quad \pi \circ s = \text{id}$$

- (iii) Das Tangentialbündel ist lokal trivial, d. h. zu jedem Punkt $x \in \mathcal{S}^2$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathcal{S}^2$ derart, daß die Einschränkung

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$$

bis auf Homöomorphie gerade

$$U \times \mathbb{R}^2 \rightarrow U, \quad (x, v) \mapsto x \quad \text{ist.}$$

- (iv) Frage: ist $T\mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$ global trivial, d. h. gibt es kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (x, v) \in & \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & T\mathcal{S}^2 \\ \downarrow & p \downarrow & & \downarrow \pi \\ x \in & \mathcal{S}^2 & \xlongequal{\quad} & \mathcal{S}^2 \end{array}$$

mit einem Homöomorphismus f , der auf jeder Faser einen \mathbb{R} -linearen Isomorphismus induziert:

$$p^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x).$$

Antwort: Nein, denn $s: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, (1, 1))$ ist Schnitt mit $s(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{S}^2$.

Definition 4.4.7 (Bigrad einer Abbildung). Für jede stetige Abbildung

$$\mu: \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$$

ist

$$H_n \mathcal{S}^n \oplus_{=\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} H_n \mathcal{S}^n \cong H_n(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n) \xrightarrow[=\mathbb{Z}]{\mu_*} H_n(\mathcal{S}^n) \quad \text{KÜNNETH-Formel} \quad (*)$$

von der Gestalt

$$(x_1, x_2) \mapsto d_1 x_1 + d_2 x_2 \quad \text{mit} \quad d_1, d_2 \in \mathbb{Z}.$$

Das Paar

$$(d_1, d_2) =: \text{deg } \mu$$

heißt Bigrad von μ .

Bemerkungen

genauere Berechnung des Isomorphismus in (*):

(i) Wir fixieren Basispunkt $Q \in \mathcal{S}^n$. Wir haben folgende stetige Abbildungen:

$$\begin{array}{lll} i_1: & \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, & x \mapsto (x, Q) \\ i_2: & \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n, & x \mapsto (Q, x) \\ p_1: & \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n, & (x, y) \mapsto x \\ p_2: & \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n, & (x, y) \mapsto y \end{array}$$

Dann ist die folgende Abbildung die identische Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n \mathcal{S}^n \oplus \tilde{H}_n \mathcal{S}^n &\xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \tilde{H}_n(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n) \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})} \tilde{H}_n \mathcal{S}^n \oplus \tilde{H}_n \mathcal{S}^n & (**) \\ (a, b) \mapsto &i_{1*}(a) + i_{2*}(b) \mapsto \underbrace{(p_{1*} i_{1*}(a))}_{=\text{id}} + \underbrace{(p_{1*} i_{2*}(b))}_{=0} + \underbrace{(p_{2*} i_{1*}(a))}_{=0} + \underbrace{(p_{2*} i_{2*}(b))}_{=\text{id}} \end{aligned}$$

Die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n \mathcal{S}^n \oplus \tilde{H}_n \mathcal{S}^n \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \tilde{H}_n(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n) \rightarrow \text{Kokern} \rightarrow 0$$

zerfällt:

$$\tilde{H}_n(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n) \underset{=\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{=} \tilde{H}_n \mathcal{S}^n \underset{=\mathbb{Z}}{\oplus} \tilde{H}_n \mathcal{S}^n \underset{=\mathbb{Z}}{\oplus} \text{Kokern}$$

\Rightarrow Kokern = 0. Also sind (i_{1*}, i_{2*}) und (p_{1*}, p_{2*}) zueinander inverse Isomorphismen. Im folgenden identifizieren wir $\tilde{H}_n \mathcal{S}^n \oplus \tilde{H}_n \mathcal{S}^n$ mit $\tilde{H}_n(\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n)$ mit Hilfe von (i_{1*}, i_{2*}) . Der Bigrad ist dann durch die folgende Bedingung definiert:

$$\mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*})(x_1, x_2) = d_1 x_1 + d_2 x_2.$$

(ii) (i_{1*}, i_{2*}) hängt nicht von der Wahl von $Q \in \mathcal{S}^n$ ab, denn diese Abbildung ist invers zu (p_{1*}, p_{2*}) .

4 Berechnung von Homologiegruppen und Anwendungen

Satz 4.4.8 (Eine Eigenschaft des Bigrades). Seien $f: S^n \rightarrow S^n \times S^n$ und $\mu: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ stetig. Seien $f_1, f_2: S^n \rightarrow S^n$ die Koordinatenfunktionen von f :

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad \forall x \in S^n.$$

Sei (d_1, d_2) der Bigrad von μ . Dann gilt:

$$\deg(\mu \circ f) = d_1 \deg f_1 + d_2 \deg f_2$$

Beweis. Für $x \in \tilde{H}_n S^n$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu_* \circ f_*(x) &= \mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*}) \circ f_*(x) \\ &= \mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*}) \circ (f_{1*}(x), f_{2*}(x)) \\ &= \mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*})(\deg f_1 \cdot x, \deg f_2 \cdot x) \\ &= d_1 \deg f_1 \cdot x + d_2 \deg f_2 \cdot x \\ &= (d_1 \deg f_1 + d_2 \deg f_2) \cdot x \\ \deg(\mu \circ f) &= d_1 \deg f_1 + d_2 \deg f_2 \end{aligned}$$

□

Satz 4.4.9 (Grad der Potenzabbildung). Sei $S = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ oder $S = S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid \|z\| = 1\}$.

Dann hat die Abbildung

$$\rho_k: S \rightarrow S, \quad z \mapsto z^k$$

den Grad k .

Beweis. Sei $n = \dim S$.

1. Schritt

Der Bigrad von $S \times S \xrightarrow{\mu} S, (z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2$ ist $(1, 1)$.

Sei (d_1, d_2) der Bigrad von μ . Dann hat man

$$\tilde{H}_n S \oplus \tilde{H}_n S \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \tilde{H}_n(S \times S) \xrightarrow{\mu_*} \tilde{H}_n S$$

$$\begin{array}{ccc} (a, b) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & d_1 a + d_2 b \\ & \searrow \quad \quad \quad \swarrow & \\ & (i_{1*} a, i_{2*} b) & \end{array}$$

Also $\mu_* \circ (i_{1*}, i_{2*}) = d_1 + d_2 b \cdot 0$ bzw. $a = 0$ liefert

$$\mu_*(i_{1*} a) = d_1 a, \quad \mu_*(i_{2*} b) = b$$

d. h.

$$\begin{aligned} d_1 a &= \mu_* i_{1*}(a) = (\mu \circ i_1)_*(a) & i_1: S &\rightarrow S \times S \\ &= a \quad \forall a & x &\mapsto (x, Q) \\ & & \mu \circ i_1(x) &= Qx \end{aligned}$$

$\mu \circ i_1 = \text{id}$ falls $Q = 1$. Analog erhält man $d_2 b = b \forall b$. Man bekommt

$$d_1 = d_2 = 1$$

im Falle $Q = 1 \in \mathbb{C}$ bzw. \mathbb{H} . (Hängt nicht von Q ab).

2. Schritt

$\deg \rho_k = k$.

Es gilt

$$\rho_k = \mu \circ (\rho_{k-1}, \text{id})$$

also

$$\begin{aligned} \deg \rho_k &= \deg \mu(\rho_{k-1}, \text{id}) \\ &= 1 \cdot \deg \rho_{k-1} + 1 \cdot \deg \text{id} \quad \text{nach 4.4.8} \\ &= \deg \rho_{k-1} + 1 \end{aligned}$$

Wegen $\deg \rho_1 = \deg \text{id} = 1$ folgt die Behauptung durch Induktion. □

Satz 4.4.10 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom*

$$p(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \dots + c_k \quad k > 0, c_1 \in \mathbb{C}$$

hat mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $p(z)$ ohne Nullstelle. Dann ist

$$\hat{p}: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1, \quad z \mapsto \frac{p(z)}{\|p(z)\|}$$

wohldefiniert und stetig. Es reicht zu zeigen:

- (i) hat p keine Nullstelle z mit $|z| \leq 1$, so gilt $\deg \hat{p} = 0$.
- (ii) hat p keine Nullstelle z mit $|z| \geq 1$, so gilt $\deg \hat{p} = k$.

Zu (i): Wir betrachten die stetige Familie

$$\hat{p}_t: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1, \quad z \mapsto \frac{p(tz)}{\|p(tz)\|} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Es gilt $\hat{p}_1 = \hat{p}$, \hat{p}_0 konstant.

$$\Rightarrow \deg \hat{p} = \deg \hat{p}_1 = \deg \hat{p}_0 = 0$$

Zu (ii): Wir betrachten stetige Familie

$$\hat{p}_t: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1, \quad z \mapsto \frac{q(z, t)}{\|q(z, t)\|} \quad 0 \leq t \leq 1$$

mit $q(z, t) = t^k p(\frac{z}{t}) = z^k + t c_1 z^{k-1} + t^2 c_2 z^{k-2} + \dots + t^k c_k$. Diese Abbildungsfamilie ist auch in $t = 0$ stetig. Es gilt $\hat{p}_0 = \rho_k$, $\hat{p}_1 = p$. Also

$$\deg p = \deg \hat{p}_1 = \deg \hat{p}_0 = \deg \rho_k = k.$$

□

5 Die Homologie der Polyeder

5.1 Vergleich von simplizialer und singulärer Homologie

Definition 5.1.1 (Einige Kategorien). $\tilde{\Delta}$ Kategorie der Simplizialkomplexe. Morphismen erhalten Simplizes.

$\tilde{\Delta}^{(2)}$ Kategorie der simplizialen Paare (K, L) mit $K \in |\tilde{\Delta}|$, $L \subseteq K$ Teilkomplex. Morphismen $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$ sind Morphismen in $\tilde{\Delta}$ mit $f(L) \subseteq L'$.

$\hat{\Delta}$ Kategorie der geordneten Simplizialkomplexe. $|\hat{\Delta}|$ ist die Klasse der Simplizialkomplexe, deren Eckenmengen mit linearer Halbordnung versehen sind. Morphismen erhalten die Ordnung (aus $a \leq b$ folgt $f(a) \leq f(b)$).

$\hat{\Delta}^{(2)}$ Kategorie der geordneten simplizialen Paare.

Definition 5.1.2 (Einige Funktoren).

$|\bullet|: \tilde{\Delta} \rightarrow \text{Top}, \quad K \mapsto |K|$ geometrische Realisierung

$\tilde{\Delta}^{(2)} \rightarrow \text{Top}^{(2)}, \quad (K, L) \mapsto (|K|, |L|)$

$S: \tilde{\Delta} \rightarrow K(\text{Ab}), \quad K \mapsto S(K)$

$S: \tilde{\Delta}^{(2)} \rightarrow K(\text{Ab}), \quad (K, L) \mapsto S(K, L) := S(K)/S(L)$ geordnete simpliziale Homologie

$H(K, L) := HS(K, L), \quad H(K) := H(K, \emptyset)$

$C: \tilde{\Delta} \rightarrow K(\text{Ab}), \quad K \mapsto C(K)$ orientierte simpliziale Ketten

$C: \tilde{\Delta}^{(2)} \rightarrow K(\text{Ab}), \quad (K, L) \mapsto C(K, L) = C(K)/C(L)$

analog:

$S, C: \hat{\Delta} \rightarrow K(\text{Ab})$

$S, C: \hat{\Delta}^{(2)} \rightarrow K(\text{Ab})$

Einige natürliche Transformationen:

$C \rightarrow S$ natürliche Transformation von Funktoren $\hat{\Delta} \rightarrow K(\text{Ab})$ bzw. $\hat{\Delta}^{(2)} \rightarrow K(\text{Ab})$.

$S \rightarrow C$ natürliche Transformation von Funktoren $\tilde{\Delta} \rightarrow K(\text{Ab})$ bzw. $\tilde{\Delta}^{(2)} \rightarrow K(\text{Ab})$.

Sei K ein Simplizialkomplex. Jedes geordnete Simplex $s = (e^0, \dots, e^q)$ läßt sich mit einem linearen singulären Simplex von $|K|$ identifizieren:

$$s: \Delta_q \rightarrow |K|, \quad e_i \mapsto e^i$$

Diese Identifikation induziert eine natürliche Einbettung

$$S(K) \hookrightarrow S(|K|)$$

5 Die Homologie der Polyeder

Für jeden Teilkomplex L von K hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(K) & \longrightarrow & S(|K|) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ S(L) & \longrightarrow & S(|L|) \end{array}$$

also einen Gruppenhomomorphismus

$$S(K, L) = \frac{S(K)}{S(L)} \rightarrow \frac{S(|K|)}{S(|L|)} = S(|K|, |L|)$$

(läßt sich als Einbettung auffassen). Alle diese Konstruktionen sind funktoriell, d. h. man erhält natürliche Transformationen

$$S(\bullet) \rightarrow S(|\bullet|), \quad S(\bullet, \diamond) \rightarrow S(|\bullet|, |\diamond|)$$

Unser Ziel ist zu zeigen: diese Transformationen induzieren Isomorphismen auf der Homologie.

Lemma 5.1.3 (Kompakte Teilmengen von Polyedern). *Seien K ein Simplicialkomplex und*

$$F \subseteq |K|$$

eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es einen endlichen Teilkomplex

$$K' \subseteq K$$

mit $F \subseteq |K'|$.

Beweis. Sei $F \subseteq |K|$ eine beliebige Teilmenge.

1. Schritt

Es gibt eine diskrete Teilmenge $F' \subseteq F$, welche mit jedem offenen Simplex von K , welches F schneidet, genau einen Punkt gemeinsam hat.

Sei I die Menge der $s \in K$ mit

$$|s|^\circ \cap F \neq \emptyset.$$

Für jedes $s \in I$ wählen wir ein

$$p_s \in |s|^\circ \cap F$$

Wir setzen $F' = \{p_s \mid s \in I\}$. Dann ist F' von der gesuchten Art, denn $|K|$ ist die disjunkte Vereinigung der $|s|^\circ$, $s \in K$.

Bemerkungen:

Jedes $|s|$ ist Vereinigung von endlich vielen $|\hat{s}|^\circ$. $\Rightarrow |s| \cap F'$ ist endlich für jedes $s \in K$. $\Rightarrow |s| \cap F'$ ist abgeschlossen in $|s|$ für $s \in K$. $\Rightarrow F'$ ist abgeschlossen in $|K|$

Analog sieht man: Jede Teilmenge von F' ist abgeschlossen in $|K|$.

Sei $p \in F'$. Zu zeigen: es gibt eine Umgebung $U \subseteq |K|$ mit $F' \cap U = \{p\}$. $F' \setminus \{p\}$ ist abgeschlossen in $|K|$. Dann ist $U := |K| \setminus (F' \setminus \{p\})$ offen in $|K|$ und enthält p . Nach Konstruktion gilt $U \cap F' = \{p\}$.

Damit gezeigt: F' ist diskret.

2. Schritt:

Beweis der Behauptung.

Sei F kompakt. Sei F' die im ersten Schritt konstruierte Menge. Sei K' die Menge der Simplizes $s \in K$ mit

$$|s|^\circ \cap F' \neq \emptyset$$

zuzüglich aller Teilsimplizes aller dieser s . Dann ist K' ein Teilkomplex von K mit

$$F \subseteq |K'|$$

($x \in F \Rightarrow \exists s \in K$ mit $x \in |s|^\circ \Rightarrow |s|^\circ \cap F \neq \emptyset \Rightarrow |s|^\circ \cap F' \neq \emptyset \Rightarrow s \in K' \Rightarrow x \in |s|^\circ \subseteq |K'|$)
 Noch zu zeigen: K' ist endlich. Es reicht zu zeigen: $\{s \in K \mid |s|^\circ \cap F' \neq \emptyset\}$ ist endlich. Dafür reicht zu zeigen: F' ist endlich. Das ist aber der Fall, weil $F' \subseteq F$ abgeschlossen und diskret und F kompakt ist. \square

Satz 5.1.4 (Vergleichssatz). Sei (K, L) ein simpliziales Paar. Dann ist für jedes q der natürliche Homomorphismus

$$H_q(K, L) \rightarrow H_q(|K|, |L|)$$

ein Isomorphismus. Anders ausgedrückt:

$$S(K, L) \rightarrow S(|K|, |L|) \quad (*)$$

induziert Isomorphismus auf Homologie

Beweis. 1. Schritt

Reduktion auf den Fall $L = \emptyset$.

Das folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q(L) & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_q(K, L) & \longrightarrow & H_{q-1}(L) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_q & & \downarrow \beta_q & & \downarrow \gamma_q & & \downarrow \alpha_{q-1} & & \\ \dots & & H_q(|L|) & \longrightarrow & H_q(|K|) & \longrightarrow & H_q(|K|, |L|) & \longrightarrow & H_{q-1}(|L|) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

zu zeigen: γ_q ist Isomorphismus. Nach dem Fünferlemma reicht zu zeigen: $\alpha_{q-1}, \alpha_q, \beta_q, \beta_{q-1}$ sind Isomorphismen.

2. Schritt:

Falls K endlich: Beweis durch Induktion nach der Anzahl l der Simplizes von K .

$l = 1$: $|K|$ ist ein einpunktiger Raum. Die Komplexe von $*$ (mit $L = \emptyset$) sind gleich und die Abbildung ist die Identität.

$l > 1$: Sei $s \in K$ von maximaler Dimension. Wir entfernen s aus K und erhalten Teilkomplex $K' \subset K$. s bildet mit allen seinen Seiten einen Teilkomplex $L \subseteq K$. Angenommen, $L = K$. dann ist $|K|$ homöomorph zu einem Standardsimplex. Simpliziale und singuläre Homologie von K bzw. $|K|$ sind gleich der Homologie eines Punktes, d. h. $*$ mit $L = \emptyset$ ist Isomorphismus. Andererseits angenommen, $L \subset K$. Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und $K = K' \cup L, |K| = |K'| \cup |L|$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q(K' \cap L) & \longrightarrow & H_q(K') \oplus H_q(L) & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_{q-1}(K' \cap L) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \oplus \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \alpha & & \\ \dots & \longrightarrow & H_q(|K'| \cap |L|) & \longrightarrow & H_q(|K'|) \oplus H_q(|L|) & \longrightarrow & H_q(|K|) & \longrightarrow & H_{q-1}(|K'| \cap |L|) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Zu zeigen: δ ist ein Isomorphismus. Nach dem Fünferlemma reicht zu zeigen: α, β, γ sind Isomorphismen. α und β sind Isomorphismen nach Induktionsvoraussetzung. γ ist Isomorphismus nach letztem Fall.

3. Schritt

K ist nun beliebig, $L = \emptyset$.

Zu zeigen:

$$H_q(K) \xrightarrow{\varphi_K} H_q(|K|)$$

ist Isomorphismus.

Zunächst: φ_K ist surjektiv: Sei $\zeta \in H_q(|K|)$. Wähle Kette $z \in S(|K|)$ mit $\zeta = [z]$. z ist endliche Linearkombination von endlichen singulären Simplizes. Nach 5.1.3 gibt es einen endlichen Teilkomplex $K' \subseteq K$ mit $z \in S(|K'|)$. Weil $\varphi_{K'}$ bijektiv ist, gibt es ein $z' \in S(K')$ mit

$$[z'] = [z] \in H(|K'|)$$

d. h. $z' - z$ ist Rand aus $S(|K'|) \subseteq S(|K|)$, d. h. $[z'] = [z]$ in $H(|K|)$.

Nun: φ_K ist injektiv: Sei $\zeta \in H_q(K)$ im Kern von φ_K . Wähle Kette $z \in S(K)$ mit $[z] = \zeta$. Nach Voraussetzung gibt es eine singuläre Kette $c \in S(|K|)$ mit $\partial c = z$. Nach 5.1.3 gibt es einen endlichen Teilkomplex $K' \subseteq K$ mit

$$c, z \in S(|K'|),$$

d. h. die Homologieklassse von z liegt im Kern von $\varphi_{K'}$. Weil $\varphi_{K'}$ bijektiv ist, folgt

$$[z] = 0 \in H(K') \subseteq H(K).$$

Wegen $S(K') \subseteq S(K)$ folgt $[z] = 0$ in $H(K)$. □

Bemerkungen:

- (i) Analoge Ergebnisse gelten für die orientierten simplizialen Ketten.
- (ii) Homologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe.

$$S(X; A) := S(X) \otimes A$$

ist der singuläre Komplex des topologischen Raums X mit Koeffizienten in A .

$$S(X, Y; A) := S(X; A) / S(Y; A)$$

Außerdem: $H(X; A) := H(S(X; A))$, $H(X, Y; A) := H(S(X, Y; A))$. Man hat die selben kurzen exakten Komplexsequenzen und langen Homologiesequenzen. Für Ausschneidungstriaden hat man die selben MAYER-VIETORIS-Sequenzen. Analog geht man im Fall von Simplizialkomplexen vor. Es gilt der Vergleichssatz.

5.2 Simpliziale Mannigfaltigkeiten

Definition 5.2.1 (Topologische Mannigfaltigkeit). *Eine (topologische) n -Mannigfaltigkeit M ist ein topologischer Hausdorff-Raum mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n .*

Definition 5.2.2 (Simpliziale Mannigfaltigkeit). Ein d -dimensionaler Simplicialkomplex K heißt simpliziale Mannigfaltigkeit, falls gilt:

- (i) Jede Seite von K ist Seite eines d -Simplex.
- (ii) Jedes $(d - 1)$ -Simplex ist Seite von genau zwei Simplizes.
- (iii) Im Falle $d > 1$ ist für jede Ecke e von K der Rand $(\text{st}_e K)'$ eine zusammenhängende $(d - 1)$ -Mannigfaltigkeit.

Im Falle $d = 1$ heißt K simpliziale Kurve, im Falle $d = 2$ simpliziale Fläche.

Vereinbarung: im folgenden seien alle Mannigfaltigkeiten zusammenhängend. Den Begriff der berandeten d -Mannigfaltigkeit erhält man, wenn man die zweite Bedingung ersetzt durch

- (ii)' Jedes $(d - 1)$ -Simplex ist Seite von höchstens zwei d -Simplizes.

Die $(d - 1)$ -Simplizes, die Seite von nur einem d -Simplex sind, bilden zusammen mit deren Seiten einen Teilkomplex ∂K , welcher Rand von K heißt. Man fordert weiter

- (iv) ∂K ist eine $(d - 1)$ -Mannigfaltigkeit.

Lemma 5.2.3. Sei K eine kompakte zusammenhängende simpliziale d -Mannigfaltigkeit und J die Menge der d -Simplizes von K . Sei $J = J' \cup J''$ eine Zerlegung von J in zwei nicht-leere disjunkte Teilmengen.

Dann gibt es d -Simplizes $s' \in J'$ und $s'' \in J''$ mit

$$\dim(s' \cap s'') = d - 1$$

Beweis. Seien

$$F' = \bigcup_{s \in J'} |s|, \quad F'' = \bigcup_{s \in J''} |s|.$$

Dann gilt $|K| = F' \cup F''$. F' und F'' sind kompakte abgeschlossene Teilmengen von $|K|$. Wäre die Vereinigung disjunkt, so wären F', F'' auch offen im Widerspruch zu $|K|$ zusammenhängend. Also $F' \cap F'' \neq \emptyset$.

Der Rest des Beweises folgt mit Induktion nach d .

$d = 1$: F' und F'' sind zwei Kantenzüge ohne gemeinsame Kanten. Jeder Punkt von $F' \cap F''$ ist gemeinsame Ecke von zwei Kanten von F' bzw. F'' .

$d > 1$: Da F' und F'' Vereinigungen von Simplizes $|s|$ mit $s \in K$ sind, gibt es eine Ecke e von K mit

$$e \in F' \cap F''.$$

Nach Definition ist $(\text{st}_e K)'$ eine $(d - 1)$ -Mannigfaltigkeit.

$$|(\text{st}_e K)'| = \bigcup_{s \in I} |s|$$

mit

$$I = \{ s \in K \mid e \notin s, \{e\} \cup s \in K, \dim s = d - 1 \}$$

$$I = I' \cup I''$$

$$I' = \{ s \in I \mid |s| \subseteq F' \} \quad I'' = \{ s \in I \mid |s| \subseteq F'' \}$$

5 Die Homologie der Polyeder

Die Vereinigung ist disjunkt: Für $s \in I' \cap I''$ gilt $\{e\} \cup s \in K$. $\{e\} \cup s$ ist ein d -Simplex des Simplexsterns von e , also I' und I'' nicht leer. e ist sowohl Ecke eines d -Simplizes s' von J' , als auch Ecke eines d -Simplizes s'' von J'' .

$$\begin{aligned} s' \in J', \quad s'' \in J'', \quad e \in s', \quad e \in s'' \\ |s'| \subseteq F', \quad |s''| \subseteq F'' \end{aligned}$$

Also $\tilde{s}' := s' \setminus \{e\}$, $\tilde{s}'' := s'' \setminus \{e\}$ sind $(d-1)$ -Simplizes von $\text{st}_e K$ mit $|\tilde{s}'| \subseteq F'$, $|\tilde{s}''| \subseteq F''$, also $\tilde{s}' \in I'$, $\tilde{s}'' \in I''$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\tilde{s}' \in I'$ und $\tilde{s}'' \in I''$ mit $\dim \tilde{s}' \cap \tilde{s}'' = d-2$. Wir setzen

$$s' = \tilde{s}' \cup \{e\}, \quad s'' = \tilde{s}'' \cup \{e\}.$$

Diese sind d -Simplizes von K mit

$$\dim s' \cap s'' = \dim \tilde{s}' \cap \tilde{s}'' = d-1$$

und $|s'| \subseteq F'$, $|s''| \subseteq F''$, d. h. $s' \in J'$, $s'' \in J''$. (hier benutzten wir: $I' := \{s \in I \mid s \cup \{e\} \in J'\} = \{s \in I \mid |s \cup \{e\}| \subseteq F'\}$, analog für I''). \square

Satz 5.2.4 (d -te Homologie einer d -Mannigfaltigkeit). Sei K eine zusammenhängende simpliziale d -Mannigfaltigkeit.

Dann gilt

$$H_d(|K|) = \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad H_q(|K|) = 0.$$

Im ersten Falle nennt man K orientierbar, im zweiten nicht orientierbar.

Beweis. Weil $|K|$ kompakt ist, ist K endlich, seien die Ecken von K e_1, \dots, e_n . Auf diese Weise seien die Ecken geordnet. Für

$$s = \{e_{i_0}, \dots, e_{i_q}\} \in K \quad i_0 < i_1 < \dots < i_q$$

Sei

$$[s] = [e_{i_0}, \dots, e_{i_q}] = (e_{i_0}, \dots, e_{i_q})$$

das zugehörige orientierte Simplex. Analog sei die Menge der d -Simplizes von K linear angeordnet.

1. Schritt:

Konstruiere eine Folge s_1, \dots, s_l von d -Simplizes und eine Folge $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \in \{\pm 1\}$ von „Vorzeichen“. s_1 sei das erste d -Simplex, $\varepsilon_1 = 1$.

Seien s_1, \dots, s_{i-1} und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}$ schon konstruiert. s_i sei das erste von s_1, \dots, s_{i-1} verschiedene d -Simplex, welches mit einem der s_1, \dots, s_{i-1} , nennen wir es $s_{j(i)}$, eine $(d-1)$ -Seite gemeinsam hat.

$$\dim \underbrace{s_i \cap s_{j(i)}}_s = d-1, \quad j(i) < i$$

Das $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ wählen wir derart, daß $[s]$ in

$$\varepsilon_i \partial[s_i] \quad \text{und} \quad \varepsilon_{j(i)} \partial[s_{j(i)}]$$

mit unterschiedlichen Vorzeichen auftaucht, d. h. in

$$\varepsilon_i \partial[s_i] + \varepsilon_{j(i)} \partial[s_{j(i)}]$$

tritt $[s]$ nur mit Koeffizienten 0 auf. Da K nur endlich viele Simplizes besitzt, bricht die Konstruktion nach endlich vielen Schritten ab und wir erhalten die Folgen s_1, \dots, s_l und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$.

2. Schritt:

$I' = \{s_1, \dots, s_l\}$ ist die Menge aller d -Simplizes von K .

Andernfalls gibt es ein d -Simplex von K , welches von allen s_i verschieden ist. Sei I'' die Menge aller dieser d -Simplizes. Nach 5.2.3 gibt es $s_i \in I'$ und $s'' \in I''$ mit

$$\dim s_i \cap s'' = d - 1,$$

d. h. die Konstruktion des ersten Schrittes läßt sich mit einem der s'' aus I'' fortsetzen im Widerspruch zur Wahl von l .

3. Schritt:

Jeder d -Zyklus von $C(K)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von

$$c := \sum \varepsilon_i [s_i].$$

Sei z ein d -Zyklus. Wegen $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ können wir z in der folgenden Gestalt schreiben:

$$z = \sum g_i \varepsilon_i [s_i] \quad \text{mit} \quad g_i \in \mathbb{Z}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$0 = \partial z = \sum g_i \varepsilon_i \partial [s_i]. \quad (*)$$

Wir betrachten ein festes i :

$$s = s_{j(i)} \cap s_i, \quad j(i) < i, \quad \dim s = d - 1$$

s ist Seite von genau zwei d -Simplizes, nämlich von s_i und $s_{j(i)}$. Deshalb tritt $[s]$ in $(*)$ an genau zwei Stellen auf: als Summand von $g_i \varepsilon_i \partial [s_i]$ und $g_{j(i)} \varepsilon_{j(i)} \partial [s_{j(i)}]$. Wegen $(*)$ gilt also: $g_i = g_{j(i)}$. Wir haben gezeigt: jedes g_i ist gleich einem $g_{i'}$ mit $i' < i$, d. h. alle g_i sind gleich:

$$z = g_0 c.$$

4. Schritt:

Berechnung von $H_d(|K|)$.

Es gilt

$$H_d(|K|) = H_d(C(K))$$

Weil K die Dimension d hat, gilt $C_{d+1}(K) = 0$, d. h.

$$H_d(|K|) = Z_d(C(K))$$

Erster Fall: Angenommen c Zyklus. Dann sind auch alle ganzzahligen Vielfachen von c Zyklen d. h.

$$H_d(|K|) = \mathbb{Z}c \cong \mathbb{Z}$$

Zweiter Fall: c ist kein Zyklus. Dann ist auch $d \cdot c$ kein Zyklus, es sei denn, $d = 0$. Also

$$H_d(|K|) = 0$$

□

Bemerkungen;:

- (i) Wenn c ein Zyklus ist, so heißt c auch *Fundamentalzyklus* von K oder auch *Orientierung* von K .
- (ii) Sind alle Koeffizienten aus \mathbb{F}_2 anstelle von \mathbb{Z} , so ist c stets ein Zyklus. Deshalb gilt für jede kompakte simpliziale d -Mannigfaltigkeit K

$$H_d(|K|; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \cdot c \cong \mathbb{F}_2.$$

- (iii) Dieselben Betrachtungen wie oben zeigen für jede berandete d -Mannigfaltigkeit mit nicht leerem Rand gilt

$$H_d(|K|; A) = 0$$

- (iv) Im Fall $d = 2$ übersetzt sich die Bedingung, daß c ein Zyklus ist, in die Aussage, K enthält keine berandete 2-Teilmannigfaltigkeit $L \subseteq K$, deren Realisierung homöomorph zum Möbiusband M ist.

5.3 Kompakte simpliziale Flächen

Definition 5.3.1 (Einfach zusammenhängende simpliziale Flächen). *Eine simpliziale Fläche heißt einfach zusammenhängend, wenn für jeden geschlossenen Kantenzug L (ohne Selbstschnitte) die Differenz $|F| \setminus |L|$ nicht mehr zusammenhängend ist.*

Keine Selbstschnitte bedeutet: jede Ecke ist Ecke von genau zwei Kanten, d. h. L ist 1-Mannigfaltigkeit.

Satz 5.3.2 (Struktur einfach zusammenhängender simplizialer Flächen). *Sei K eine einfach zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche. Dann ist $|K|$ homöomorph zur 2-Sphäre,*

$$|K| \cong S^2$$

Beweis. 1. Schritt

Satz von JORDAN.

Für jeden geschlossenen zusammenhängenden Kantenzug L von K ohne Selbstschnitte ist die Anzahl der Komponenten von $|K| \setminus |L|$ gleich 2:

$$H_0(|K| \setminus |L|) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Seien c_1, \dots, c_t die Komponenten von $|K| \setminus |L|$. Nach Voraussetzung ist $t \geq 2$. Eigenschaften der c_i :

- (i) die c_i sind disjunkte Vereinigungen offener Simplizes von K .
- (ii) die Abschließungen \bar{c}_i der c_i sind Vereinigungen abgeschlossener 2-Simplizes von K .
- (iii) die c_i sind abgeschlossen in $|K| \setminus |L|$, also auch in $|K|$.
- (iv) die c_i sind offene Teilmengen von $|K| \setminus |L|$, also auch von $|K|$.

Zum Beweis der Behauptung reicht zu zeigen:

$$|L| \subseteq \bar{c}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, t \quad (*)$$

Ist nämlich l eine Kante von L und sind Δ' und Δ'' die beiden Dreiecke mit der Seite l , so liegt jeder innere Punkt von l ganz im Innern von

$$|\Delta' \cap \Delta''|. \quad (*')$$

Wegen $(*)$ enthält jedes \bar{c}_i einen inneren Punkt von $(*')$. Da Δ' und Δ'' die beiden einzigen Dreiecke sind, die an l grenzen, muß eines dieser Dreiecke ein Dreieck von c_i sein:

$$|\Delta'|^\circ \subseteq c_i \quad \text{oder} \quad |\Delta''|^\circ \subseteq c_i$$

Da die c_i disjunkt sind, folgt $t \leq 2$.

Beweis von $(*)$: \bar{c}_i ist linear zusammenhängend, dann folgt $\bar{c}_i \cap |L|$ ist leer oder linear zusammenhängend.

Zeigen wir, dieser Durchschnitt ist nicht leer. $J = \{\text{Dreiecke von } K\}$. $J = J' \cup J''$. J' sei die Menge der Dreiecke Δ mit $|\Delta| \subseteq \bar{c}_i$. J'' sei die Menge der übrigen Dreiecke. Nach 5.2.3 gibt es Dreiecke

$$\Delta' \in J', \quad \Delta'' \in J'' \quad \text{mit} \quad \dim \underbrace{\Delta' \cap \Delta''}_s = 1.$$

\Rightarrow besteht aus Punkten, deren Umgebungen Punkte mit c_i und auch Punkte mit $|K| \setminus c_i$ gemeinsam haben. $\Rightarrow |s| \subseteq \partial c_i \subseteq \bar{c}_i \Rightarrow |L| \cap \bar{c}_i$ hat mindestens eine Kante.

Wir wählen einen in $|L| \cap \bar{c}_i$ liegenden maximalen Kantenzug L' .

1. Fall: $L' = L \Rightarrow |L| = |L'| \subseteq \bar{c}_i$, dann gilt $(*)$.

2. Fall: Dann kann L' nicht geschlossen sein, es besitzt also einen Endpunkt $e \in L'$, d. h. e ist Ecke von genau einer Seite l_1 von L' . l_1 ist Seite von mindestens einem Dreieck Δ_1 von K mit $|\Delta_1| \subseteq \bar{c}_i$. Konstruktion: Sei l_2 die von l_1 verschiedene Seite von Δ_1 mit der Ecke e . Δ_2 sei das von Δ_1 verschiedene Dreieck mit der Seite l_2 . l_3 die von l_2 verschiedene Seite von Δ_2 mit Ecke e . Weil K endlich ist, ist diese Konstruktion periodisch mit Periode t' .

$$\begin{aligned} e \in \Delta_j \cap \Delta_{j+1} &= l_{j+1} \\ \Delta_{r+1} &= \Delta_1 \quad l_{r+1} = \Delta_r \cap \Delta_{r+1} = \Delta_1 \cap \Delta_r = l_1 \\ \Delta_1 \neq \Delta_2 &\Rightarrow t' \geq 2 \\ \Delta_3 \neq \Delta_1 &\Rightarrow t' \geq 3 \quad (\text{sonst } \Delta_1 = \Delta_2) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist Δ_r das von Δ_1 verschiedene Dreieck mit der Seite l_1 ,

$$\Delta_r \subseteq \bar{c}_1$$

—

Angenommen: $|L| \subset \bar{c}_i$. Dann ist $|L| \cap \bar{c}_i$ disjunkte Vereinigung von endlich vielen zusammenhängenden Kantenzügen und eventuell endlich vielen Punkten. Gezeigt: ein Kantenzug L' kommt mindestens vor, L' nicht geschlossen, d. h. \exists Eckpunkt e und Endkante l , und daran liegend $\Delta_1 \subseteq \bar{c}_i$.

Problem: liegen alle Δ_i ganz in \bar{c}_i ?

Falls ja: Die von l verschiedene Kante l' von L mit der Ecke e ist dann Kante von zwei der Δ_i . Also gilt $l' \subseteq \bar{c}_i$, d. h. es gilt

$$|L'| \cup |l| = \bar{c}_i$$

5 Die Homologie der Polyeder

im Widerspruch zur Wahl von L' .

Falls nein: Wähle s mit

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s \subseteq \bar{c}_i, \Delta_{s+1} \subset \bar{c}_i$$

d. h. $\Delta_{s+1} \subseteq \bar{c}_j$ für ein $j \neq i$. Also die gemeinsame Seite l_{s+1} von Δ_s und Δ_{s+1} liegt dann aber sowohl auf Rand von \bar{c}_i als auch auf Rand von \bar{c}_j . Insbesondere gilt $l_{s+1} \subseteq \bar{c}_i$, d. h. $|L'| \cup |l_{s+1}| \subseteq \bar{c}_i$ im Widerspruch zur Wahl von L' .

2. Schritt:

Für jeden geschlossenen Kantenzug L von K ohne Selbstschnitte ist jede der beiden abgeschlossenen Komponenten von $|K| \setminus |L|$ homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Seien c' und c'' die beiden abgeschlossenen Komponenten. Es reicht zu zeigen: c' ist homöomorph zur Kreisscheibe.

c' ist Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Dreiecke von K . Wir führen den Beweis durch Induktion nach deren Anzahl n .

$n = 1$: Δ_1 ist homöomorph zu \mathcal{B}^1 .

$n > 1$: Wir ändern L so ab, daß eines der Randdreiecke Δ von c' zu einem Dreieck von c'' wird und erhalten einen Kantenzug L_1 .

1. Fall: L_1 hat keine Selbstschnitte. Nach Induktionsvoraussetzung ist $c' \setminus \Delta$ homöomorph zur Kreisscheibe \mathcal{B}^1 . Wir erhalten c' aus \mathcal{B}^1 durch Ankleben von Δ entlang eines gemeinsamen Randintervalls, d. h. c' ist homöomorph zur Kreisscheibe.

2. Fall: L' ist Vereinigung von zwei geschlossenen Teilkantenzügen L'_1 und L'_2 mit einer gemeinsamen Ecke. Jeweils eine der beiden abgeschlossenen Komponenten c'_i zu L'_i ist echt enthalten in c' . Nach Induktionsvoraussetzung sind diese also homöomorph zu \mathcal{B}^1 , es gilt

$$c' = c'_1 \cup \Delta \cup c'_2.$$

c' entsteht also aus der Kreisscheibe c'_1 durch Ankleben von Δ entlang eines Randintervalls und anschließendem Ankleben der Kreisscheibe c'_2 ebenso entlang eines Randintervalls. Insgesamt ist also c' homöomorph zur Kreisscheibe.

3. Schritt:

Abschluß des Beweises:

Nach dem zweiten Schritt entsteht $|K|$ durch Verkleben zweier Kreisscheiben entlang ihrer gemeinsamen Randlinie, d. h.

$$|K| \cong \mathcal{S}^2.$$

□

Bemerkungen:

- (i) Umgekehrt ist jede simpliziale Fläche K mit $|K| \cong \mathcal{S}^2$ einfach zusammenhängend.
- (ii) Eine kompakte simpliziale Fläche K ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn deren baryzentrische Unterteilung es ist.

Satz 5.3.3 (Nicht einfach zusammenhängende kompakte Flächen). *Sei K eine zusammenhängende kompakte simpliziale Fläche, die nicht einfach zusammenhängend ist. Dann tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:*

- (i) *Eine iterierte baryzentrische Unterteilung K' von K enthält einen Teilkomplex $L \subseteq K'$, dessen Realisierung homöomorph zum kompakten Möbiusband \mathcal{M} ist.*

- (ii) Eine iterierte baryzentrische Unterteilung K' von K enthält einen Teilkomplex L , dessen Realisierung homöomorph zur Oberfläche eines Torus ist, aus dem eine Kreisscheibe entfernt wurde. (Hantel \mathcal{T}_*).

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen geschlossenen Kantenzug $L \subseteq K$ ohne Selbstschnitte mit der Eigenschaft, daß $|K| \setminus |L|$ zusammenhängend ist. Beginnend mit einer Ecke e von L durchlaufen wir die Kurve $|L|$, wobei wir uns vorstellen, daß wir stets rechts neben der Kurve herlaufen. Wenn wir wieder bei e ankommen, gibt es zwei Möglichkeiten:

- (i) Wir befinden uns links neben der Kurve $|L|$.
- (ii) Wir befinden uns rechts davon.

Im ersten Fall tritt der erste im Satz beschriebene Fall ein.

Nehmen wir an, dieser Fall tritt nicht ein, d. h. $|K|$ enthalte kein Möbiusband. In der Fläche $|K|$ liegt dann ein „Streifen“, also ein Zylinder über der Kreislinie. Wir betrachten eine von e ausgehende Kante l von L und die beiden Dreiecke Δ' und Δ'' mit der Seite l . Seien $b' := b(\Delta')$ und $b'' := b(\Delta'')$ die Baryzentren von Δ' bzw. Δ'' . Da $|K| \setminus |L|$ zusammenhängend ist, gibt es einen Kantenzug in $|K| \setminus |L|$, welcher b' und b'' verbindet. Durch Hinzufügen zweier Kanten innerhalb von $\Delta' \cup \Delta''$ erhalten wir einen zweiten geschlossenen Kantenzug L' , der mit L nur den Punkt e gemeinsam hat. Wir wiederholen obige Konstruktion und erhalten einen zweiten Streifen. Durch Vereinigung der beiden Streifen erhalten wir einen Raum, der dem \mathcal{T}_* entspricht. \square

Bemerkungen:

- (i) Es gelten:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(\mathcal{M}) &= 0 && \text{(da } \mathcal{M} \text{ zusammenhängend)} \\ H_2(\mathcal{M}) &= 0 && \text{(da } \mathcal{M} \text{ berandet)} \\ H_1(\mathcal{M}) &= \tilde{H}(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} && \text{(da } \mathcal{S}^1 \text{ starker Deformationsretrakt von } \mathcal{M}) \end{aligned}$$

- (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} H_2(\mathcal{T}_*) &= 0 && \text{(da } \mathcal{T}_* \text{ berandet)} \\ H_1(\mathcal{T}_*) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} H_q(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*) &= H_q(\mathcal{T}, \Delta) && \text{(nach Ausschneidungssatz)} \\ &= H_q(\mathcal{T}, \{p\}) = \tilde{H}_q(\mathcal{T}) \\ H_2(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*) &= \mathbb{Z} \\ H_1(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die relative Homologiesequenz von $(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*)$ liefert:

$$H_2(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*) \underset{=\mathbb{Z}}{\xrightarrow{\alpha}} H_1(\partial\mathcal{T}_*) \underset{=H_1(\mathcal{S}^1)=\mathbb{Z}}{\xrightarrow{\beta}} H_1(\mathcal{T}_*) \underset{=0}{\xrightarrow{\gamma}} H_1(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*) \underset{=0}{\xrightarrow{\delta}} H_0(\partial\mathcal{T}_*) \underset{=\mathbb{Z}}{\xrightarrow{\varepsilon}} H_0(\mathcal{T}_*) \underset{=\mathbb{Z}}{\xrightarrow{\text{id}}}$$

5 Die Homologie der Polyeder

Durch Betrachten des relativen Fundamentalzyklus sieht man: α surjektiv, also $\beta = 0$ und hat somit

$$0 \rightarrow H_1(\mathcal{T}_*) \xrightarrow{\gamma} H_1(\mathcal{T}_*, \partial\mathcal{T}_*) \rightarrow 0$$

$=\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

□

Satz 5.3.4 (Homologische Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Flächen). *Seien K eine kompakte simpliziale Fläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) K ist einfach zusammenhängend.
- (ii) $H_1(K) = 0$

Beweis. (i)⇒(ii): Nach 5.3.3 ist $|K| \cong \mathcal{S}^2$, also

$$H_1(K) \cong H_1(|K|) \cong H_1(\mathcal{S}^2) = 0.$$

(ii)⇒(i): Angenommen, K ist nicht einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine iterierte baryzentrische Umgebung K' von K und einen Teilkomplex $L' \subseteq K'$ mit

$$|L'| \cong \mathcal{M} \quad \text{oder} \quad |L'| \cong \mathcal{T}_*.$$

Wir schreiben $K' = L' \cup L''$ mit einem Teilkomplex L'' , der mit L' nur den Rand gemeinsam hat.

$$|L' \cap L''| \cong \mathcal{S}^1$$

Dann haben wir die MAYER-VIETORIS-Sequenz

$$H_2(K') \xrightarrow{\alpha} H_1(L' \cap L'') \xrightarrow{\beta} H_1(L') \oplus H_1(L'') \xrightarrow{\gamma} H_1(K').$$

$=\mathbb{Z}$ $=H_1(K)=0$

$H_1(L' \cap L'')$ wird vom Fundamentalzyklus erzeugt. Dieser liegt im Bild von α , d. h. α ist surjektiv, d. h. $\beta = 0$, d. h.

$$0 \rightarrow H_1(L') \oplus H_1(L'') \rightarrow 0$$

d. h. $H_1(L') = H_1(L'') = 0$ im Widerspruch zu $|L'| \cong \mathcal{M}$ oder $|L'| \cong \mathcal{T}_*$. □

Definition 5.3.5 (Adjunktion). *Sei K eine simpliziale Fläche. Wir entfernen aus $|K|$ eine offene Kreisscheibe und kleben entlang des gemeinsamen Randes ein Möbiusband bzw. eine Hantel ein. Von der entstehenden Fläche sagt man, sie entsteht aus K durch Adjunktion eines Möbiusbandes bzw. einer Hantel.*

Bemerkungen:

- (i) Die Adjunktion von \mathcal{M} liefert nicht-orientierbare Flächen.
- (ii) Die Adjunktion einer Hantel erhält die Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit. (Man betrachte Fundamentalzyklen bzw. Möbiusbänder)

Satz 5.3.6 (Klassifikation der kompakten simplizialen Flächen). *Sei X die Realisierung einer kompakten simplizialen Fläche. Dann gilt:*

- (i) X entsteht aus der Kugeloberfläche durch Adjunktion von endlich vielen Möbiusbändern und endlich vielen Hanteln.
- (ii) Ist X orientierbar, so entsteht X durch Adjunktion von Hanteln.

Beweis. Falls X einfach zusammenhängend ist, dann ist X eine Kugeloberfläche und die Behauptung bereits gezeigt.

Sei X also nicht einfach zusammenhängend. Dann enthält X ein Möbiusband oder eine Hantel:

$$\mathcal{M} \subseteq X \quad \text{oder} \quad \mathcal{T}_* \subseteq X.$$

Wir schreiben $Y = \mathcal{M}$ bzw. $Y = \mathcal{T}_*$ und $X = Y \cup Z$, wobei Z ein Teilpolyeder ist, welches mit Y nur dessen Randpunkte gemeinsam hat. Weiter entstehe W aus Z durch Einkleben einer Kreisscheibe entlang der gemeinsamen Randlinie. Mit anderen Worten: X entsteht aus W durch Adjunktion einer Hantel bzw. eines Möbiusbandes. Wir haben zu zeigen: durch Wiederholung der obigen Konstruktion erhält man nach endlich vielen Schritten eine einfach zusammenhängende Fläche, d. h. es reicht zu zeigen: das Konstruktionsverfahren bricht ab.

Dann reicht es zu zeigen:

$$\dim \tilde{H}_1(X; \mathbb{F}_2) > \dim \tilde{H}_1(W; \mathbb{F}_2)$$

Die reduzierte MAYER-VIETORIS-Sequenz zur polyhedralen Triade (X, Y, Z) ist

$$\underbrace{\tilde{H}_2(Y) \oplus \tilde{H}_2(Z)}_{\substack{=0 \\ \text{berandete 2-Mflt.}}} \xrightarrow{=0} \tilde{H}_2(X) \xrightarrow[\text{inj.}]{\beta} \underbrace{\tilde{H}_1(Y \cap Z)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y) \oplus \tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{\varepsilon} \tilde{H}_0(Y \cap Z) \xrightarrow[\cong \mathbb{Z}]{\zeta} \underbrace{\tilde{H}_0(Y) \oplus \tilde{H}_0(Z)}_{\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \xrightarrow[\cong \mathbb{Z}]{\eta} \tilde{H}_0(X) \rightarrow 0$$

ζ ist injektiv, also $\varepsilon = 0$ und damit δ surjektiv. Damit ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(X) \xrightarrow{\beta} \underbrace{\mathbb{Z}}_{=\tilde{H}_1(S^1)=\tilde{H}_1(Y \cap Z)} \xrightarrow{\gamma} \tilde{H}_1(Y) \oplus \tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X) \rightarrow 0 \quad (*)$$

1. Fall:

X enthält kein Möbiusband $\Rightarrow X$ ist orientierbar, d. h.

$$\tilde{H}_2(X) = \mathbb{Z}$$

und $(*)$ hat die Gestalt

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_1(Z) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X) \rightarrow 0.$$

Das Bild von $1 \in \mathbb{Z}$ bei γ in $\tilde{H}_1(Y)$ bzw. $\tilde{H}_1(Z)$ wird gerade durch den Fundamentalzyklus von ∂Y bzw. von ∂Z repräsentiert, ist also 0, also $\gamma = 0$, damit δ Isomorphismus,

$$\tilde{H}_1(X) \cong \tilde{H}_1(Y) \oplus \tilde{H}_1(Z) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_1(Z).$$

Die selbe Rechnung mit der Kreisscheibe anstelle von Y liefert

$$\tilde{H}_1(W) = \tilde{H}_1(Z) \quad \text{d. h.} \quad \tilde{H}_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_1(W).$$

5 Die Homologie der Polyeder

Die selbe Rechnung mit \mathbb{F}_2 anstelle von \mathbb{Z} liefert

$$\dim \tilde{H}_1(X; \mathbb{F}_2) = \dim \tilde{H}_1(W; \mathbb{F}_2) + 2.$$

2. Fall:

Y ist Möbiusband, d. h. $Y = \mathcal{M}$.

Die Sequenz (*) über \mathbb{F}_2 betrachtet hat die Gestalt

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{F}_2 \oplus \tilde{H}_1(Z; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_1(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

also $\dim \tilde{H}_1(X; \mathbb{F}_2) = \dim \tilde{H}_1(Z; \mathbb{F}_2) + 1$. Die selbe Betrachtung mit einer Kreisscheibe anstelle von Y liefert

$$\dim \tilde{H}_1(W; \mathbb{F}_2) = \dim \tilde{H}_1(Z; \mathbb{F}_2)$$

und zusammen

$$\dim \tilde{H}_1(X; \mathbb{F}_2) = \dim \tilde{H}_1(W; \mathbb{F}_2) + 1.$$

□

Bemerkung

Für X orientierbar ist

$$g := \dim H_1(X; \mathbb{F}_2)/2$$

gerade die Anzahl der Hanteln, die man zu S^2 adjungieren muß, um X zu erhalten. g heißt *Geschlecht* von X .

Index

Alle **fett** gedruckten Seitenzahlen sind Referenzen auf die Definition des jeweiligen Begriffs. *Kursiv* gedruckte Seitenzahlen verweisen auf Sätze. Demgegenüber geben normal gedruckte Seitenzahlen die Seiten der Verwendung des jeweiligen Begriffs wieder.

— Symbole —

(X, A) , **10**
 (X, A, B) , **10**
 $B_n K$, **11**
 B_q , **46**
 C^{op} , **3**
 Cf , **14**
 $F: C \rightarrow D$, **4**
 $G[i]$, **13**
 $H(X, A)$, **32**
 HX , **32**
 $H_n(S(X, A))$, **32**
 $H_n(SX)$, **32**
 $H_n(X, A)$, **32**
 $H_n K$, **11**
 $H_n X$, **32**
 K , **11**
 $K'(\text{Ab})$, **23**
 Q , **69**
 $S\{X_1, X_2\}$, **55**
 $S_q X$, **29**
 $S_q f$, **30**
 TS^2 , **84**
 $Z_n K$, **11**
 $[f]$, **9, 22**
 Ab , **2**
 \mathcal{B}^n , **69**
 Δ , **3**
 Δ_q , **27**
 Ens , **2**
 $\text{Hom}_C(X, Y)$, **1**
 Top , **2**
 Top' , **9**
 $\text{Top}^{(2)}$, **10**
 Top_* , **78**
 Λ_n , **71**
 \mathcal{M} , **98**
 S^n , **69**
 ΣX , **61**
 $\mathcal{T}(X)$, **1**
 \mathcal{T}_* , **99**

$|C|$, **1**
 $\bigoplus_{i \in I} X_i$, **10**
 $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_n$, **13**
 $\bigvee_{i \in I} X_i$, **10**
 \circ , **1**
 $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, **10**
 $\deg f$, **81, 85**
 δ , **17, 72**
 η^X , **35**
 η'_q , **28**
 γ^X , **34**
 $\hat{\Delta}$, **89**
 $\hat{\Delta}^{(2)}$, **89**
 id , **2**
 $|\bullet|$, **89**
 $\hat{\Delta}_n$, **71**
 \mathbb{R}_+ , **79**
 $\text{Mor}(C)$, **2**
 $\text{ob}(C)$, **1**
 $\|\bullet\|$, **46, 69**
 ∂ , **11**
 ∂_q , **30**
 π , **69**
 π' , **69**
 $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$, **29**
 \sim , **11**
 \simeq , **8, 22**
 $\tilde{H}X$, **34**
 $\tilde{\Delta}$, **89**
 $\tilde{\Delta}^{(2)}$, **89**
 \times , **3**
 ε^j , **28**
 e_i , **27**
 f_* , **24**

— A —

Abbildung
 lineare, **27**
 stetig, **1**
 Abbildungen
 homotope, **8**
 Abbildungskeim, **77**

Index

- Adjunktion, **100**
Äquivalenz
 natürliche, **5**
Augmentation, **34, 35**
Ausschnitts-
 satz, **51, 55, 56**
 triade, **55, 60**
azyklisch, **80**
- B —
baryzentrische
 Umgebung, **64**
 Unterteilung, **52, 63**
 Durchmesser einer, **46**
 eines Simplicialkomplexes, **63**
Baryzentrum, **63**
Basispunkt, **69**
Bigrad einer Abbildung, **85**
BROUWERSCHER Fixpunktsatz, *siehe* Fixpunktsatz
 VON BROUWER
Bukett, **53**
 Homologie eines, *siehe* Homologie, eines Buketts
- C —
CW-Raum, **56**
- D —
Deformation
 baryzentrische, **65**
Deformationsretrakt, **45, 53**
Differential, *siehe* Randabbildung
- E —
Ecke, **27**
Element
 universelles, **7**
- F —
Fünferlemma, **41, 61, 67**
Fixpunktsatz
 VON BROUWER, **75**
fundamentale Zyklen, **75**
Fundamentalsatz der Algebra, **87**
Fundamentalzyklus, **96**
Funktorkomplex, **4**
 Bi-, **4**
 darstellbarer, **7**
 Ko-, **4**
 kontravarianter, **4**
 kovarianter, **4**
- G —
geometrische Realisierung
 eines Simplicialkomplexes, **62**
- Geschlecht, **102**
Grad einer Abbildung, **81**
Gruppe
 graduierte, **13**
- H —
Hausdorff-Raum, **1**
Hom-Menge, **1**
Homologie
 -sequenz
 eines Retrakts, **40**
 lange, **33, 56**
 lange exakte, **18**
 0-te, **38**
 einer Homotopie-Äquivalenz, **24**
 einer Suspension, **60**
 eines Buketts, **53, 60**
 eines Komplexes, **11**
 homotoper Komplexmorphismen, **23**
 reduzierte, **34**
 singuläre, **32**
Homotopie, **8**
 -äquivalenz, **23, 26, 36, 41**
 -funktor, **9**
 -kategorie, **9, 23**
 -klassen, **9**
 Komplex-, *siehe* Homotopie von Ketten
 natürliche, **42, 49**
 von Ketten, **22, 42**
 von Paaren, **10**
Horn, **72**
- I —
Igel, **84**
 Satz vom, *siehe* Satz vom Igel
- J —
JORDAN
 Satz von, *siehe* Satz von JORDAN
- K —
KÜNNETH-Formel, **77**
Kategorie, **1**
 duale, **3**
 Teil-, **3**
Kategorien
 Produkt von, **3**
Kegel, **36, 48, 61**
 einer Komplexabbildung, **14**
Kettenabbildung, *siehe* Komplexabbildung
Komplex, **11**
 -abbildung, **11**
 -morphismus, *siehe* Komplexabbildung
 direkte Summe von, **14**
 Faktor-, **15**

- freier, **26**
- kontrahierbarer, **23**
- singulärer, **30**
- Teil-, **15**
- kontrahierbar, **23, 24, 41**
- konvex, **36**
- Koordinate, **62**
- L —
- Lemma
 - VON YONEDA, **6**
- lokale Homologie, **77**
- M —
- Mannigfaltigkeit
 - berandete, **93**
 - orientierbare, **94**
 - simpliziale, **93**
 - topologische, **92**
- MAYER-VIETORIS-Sequenz
 - absolute, **57**
 - reduzierte, **59**
 - relative, **57**
 - von Paaren von Ausschneidungstriaden, **61**
- Morphismus, **1**
 - Epi-, **3**
 - Iso-, **3**
 - Mono-, **3**
- N —
- n -Kugel, **69**
 - offene, **69**
- n -Sphäre, **69**
- Norm, **69**
- O —
- Orientierung, **96**
- P —
- p -äquivalent, **77**
- p -Abbildung, **77**
- Paar
 - polyhedrales, **62**
 - topologisches, **10, 31**
- Polyeder, **62**
- Potenzabbildung, **86**
- Produkt
 - direktes, **8**
 - von Paaren, **10**
- Q —
- Quasi
 - Isomorphie, **21, 26**
 - Isomorphismus, **20**
- R —
- Rand, **11**
 - operator, **30**
 - modulo A , **32**
- Randabbildung, **11, 28**
- Retrakt, **39, 40**
- Retraktion, **3, 39**
- S —
- Satz
 - vom Igel, **84**
 - VON JORDAN, **60, 96**
- Sequenz
 - exakte
 - zerfallende, **20**
- Simplex
 - stern, **65**
 - singuläres, **29**
 - Standard-, **27**
- simpliziale Fläche, **93**
 - einfach zusammenhängende, **96**
 - Struktur einer, **96**
- simpliziale Kurve, **93**
- Simplizialkomplex, **62**
- Skelett, **60**
- Sphäre
 - dicke, **60**
- Standardabbildung
 - der Vollkugel, **69**
- Standardsimplex, *siehe* Simplex, Standard-Summe
 - direkte, **7**
 - von Paaren, **10**
- Suspension, **14, 61**
 - Homologie einer, *siehe* Homologie einer Suspension
- T —
- Tangential
 - bündel, **84**
 - vektorfeld, **84**
- Tangentialvektor, **84**
- Tangentialvektorfeld, **84**
- Topologie
 - eines Polyeders, **63**
- Transformation
 - natürliche, **5**
- Triade, **10, 55**
 - ausschneidende, **55**
- Tripel
 - topologisches, **10**
- U —
- Umgebungsretrakt, **39**
- Unterteilungshomomorphismus, **46**

Index

- V —
- Vergleichssatz, [91](#)
- Y —
- YONEDA
 - Lemma von, *siehe* Lemma von YONEDA
- Z —
- zusammenhängend
 - linear, [37](#)
- Zusammenhangshomomorphismus, [17](#), [20](#), [40](#)
- Zusammenhangshomomorphismus
 - der absoluten MAYER-VIETORIS-Sequenz, [58](#)
 - der relativen MAYER-VIETORIS-Sequenz, [58](#)
- Zyklus, [11](#)
 - modulo A , [32](#)